Katechismus

der

Rechenkunst.

für

Schulen, so wie zum Selbstunterrichte für Alle, welche das hinsichtlich des Rechnens in der Jugend Versäumte, oder seitdem Vergessene nachholen und sich wieder aneignen wollen;

von

H. Gräfe.

Leipzig,
in der Baumgärtnerschen Buchhandlung.
1824.

97 ~~H.J. VI. 45~~

Siddhi.

a Ma

c

97

Dons Jack

Katechismus
der
Rechenkunst.

Oder

leicht faßlicher und gründlicher Unterricht

in den

4 Rechnungsarten in ganzen und gebrochenen Zahlen, und in der Proportionsrechnung, oder der sogenannten Regula de tri, Reductionsrechnung, Gesellschaftsrechnung, Zinsrechnung u. s. w.; nebst einer Sammlung von Aufgaben über alle vorkommende Rechnungsarten

für

Schulen, so wie zum Selbstunterrichte für Alle, welche das hinsichtlich des Rechnens in der Jugend Versäumte, oder seitdem Vergessene nachholen und sich wieder aneignen wollen;

von

H. Gráfe.

Leipzig,
in der Baumgärtnerschen Buchhandlung.
1824.

Vorwort.

Unter der großen Zahl von Rechenbüchern, die es giebt, finden sich nur wenige, die einer besondern Berücksichtigung werth sind. Bei weitem die meisten gehen auf dem festgetretenen Wege des Mechanischen einher, ohne die Schärfung des Verstandes und Denkvermögens, welche doch ein Hauptzweck des Rechnens seyn muß, zu berücksichtigen. Der Verfasser vorliegenden Werkchens kam daher vor einiger Zeit auf den Gedanken, ein Rechenbuch zu schreiben, das, jenen Weg verlas-

send, durch Angabe der Gründe, warum so und nicht anders verfahren wird, das Nachdenken der Lernenden zu wecken, und die Geisteskräfte zu stärken, im Stande wäre. In Frage und Antwort sollte es abgefaßt werden, damit es verständlicher würde, und auch zum Selbunterricht dienen könnte. Denn daß durch zweckmäßigen Gebrauch der katechetischen Methode die Deutlichkeit und das leichtere Verständniß einer Wissenschaft, besonders der Rechenkunst, sehr befördert wird, bedarf kaum einer Erwähnung.

Schon war ein Theil des Katechismus ausgearbeitet, als mir der Rechenkatechismus von Rommerdt (Nordhausen bei Landgraf 1823.) zu Gesichte kam. Ich hielt schon meine ganze bisherige Arbeit und Mühe für

vergebens; da ich glaubte, es sey hier schon geleistet, was ich leisten wollte. Bei einer nähern Ansicht aber fand ich diese Besorgniß ungegründet. Denn dieser sogenannte Rechenkatechismus ist weiter nichts, als ein ganz gewöhnliches Rechenbuch, nur mit dem Unterschiede, daß zuweilen eine Frage eingestreut ist, die aber zum bessern Verständniß nichts beiträgt. Der Verfasser scheint weder von Katechismus und katechetischer Methode, noch von dem, was in einem Rechenbuche gelei-

stet werden muß, sich klare Vorstellungen gemacht zu haben. Jedoch ist dies blos subjective Ansicht, und ich bin weit entfernt, sie als objectiv richtig auszugeben. Jedenfalls aber glaube ich, daß dieser vorliegende Katechismus der Rechenkunst sich dem von Rom-

merdt nicht nur an die Seite stellen, sondern sich auch kühnlich über ihn erheben kann.

Ein zweites Bändchen, dessen Erscheinen von der Aufnahme dieses ersten abhängt, soll die Dezimalbrüche, die Quadrat- und Kubikrechnung, und etwas von den Progressionen und den Gleichungen enthalten, und ist für diejenigen bestimmt, die im Rechnen etwas weiter gehen wollen, als gewöhnlich ist.

Inhalt.

Erstes Kapitel. Seite

Von den Zahlen und ihrer Bezeichnungsart . . 1

Zweites Kapitel.

Eintheilung der Zahlen 12

Drittes Kapitel.

Vom Numeriren oder der Numeration . . . 15

Viertes Kapitel.

Von der Rechenkunst, ihrem Begriff, ihrer Eintheilung und ihrem Nutzen 24

Erstes Hauptstück.

Von ganzen unbenannten Zahlen.

Fünftes Kapitel.

Von den Rechnungsarten im Allgemeinen . . 26

Sechstes Kapitel.

Von der Addition oder dem Addiren . . . 29

Siebentes Kapitel.

Vom Subtrahiren oder der Subtraction . . 36

Achtes Kapitel.

Von der Multiplication oder dem Multipliciren (Vervielfältigen) 51

Neuntes Kapitel.

Vom Dividiren oder der Division 84

Zehntes Kapitel.

Von den Proben 107

Eilftes Kapitel.

Vom Zerfällen der Zahlen 115

Zweites Hauptstück.

Von ganzen benannten Zahlen.

Zwölftes Kapitel.

Von der Reduction benannter Zahlen . . . 131

Dreizehntes Kapitel.

Addition oder Subtraction ungleichbenannter Zahlen. 139

Vierzehntes Kapitel.

Multiplication und Division ungleichbenannter Zahlen. 157

Funfzehntes Kapitel.

Von vermischten Aufgaben 174

Drittes Hauptstück.

Von den Brüchen.

Sechzehntes Kapitel.

Von den Brüchen überhaupt, ihrer Erklärung, Bezeichnung und Eintheilung 177

Seite

Siebzehntes Kapitel.

Vom Werthe der Brüche 182

Achtzehntes Kapitel.

Vom Abkürzen oder Aufheben der Brüche . . 187

Neunzehntes Kapitel.

Brüche von verschiedener Benennung auf einerlei Benennung zu bringen 193

Zwanzigstes Kapitel.

Ganze und vermischte Zahlen in Brüche zu verwandeln. 200

Ein und zwanzigstes Kapitel.

Von der Addition und Subtraction der Brüche . 202

Zwei und zwanzigstes Kapitel.

Von der Multiplication und Division in Brüchen . 211

Drei und zwanzigstes Kapitel.

Von benannten Brüchen 225

Viertes Hauptstück.

Von der Proportionsrechnung.

Vier und zwanzigstes Kapitel.

Vorkenntnisse von Verhältnissen und Proportionen . 232

Fünf und zwanzigstes Kapitel.

Von der Proportionsrechnung im Allgemeinen . 248

Sechs und zwanzigstes Kapitel.

Von der einfachen Regeldetri 253

Sieben und zwanzigstes Kapitel.

Von der zusammengesetzten Regeldetri; oder von der Regula quinque, septem, multiplex . . . 270

Acht und zwanzigstes Kapitel.

Von der Reductionsrechnung 287

Neun und zwanzigstes Kapitel.

Von der Kettenregel 293

Dreißigstes Kapitel.

Die Gesellschaftsrechnung 298

Ein und dreißigstes Kapitel.

Vermischungs- und Alligationsrechnung . . . 315

Zwei und dreißigstes Kapitel.

Zins- oder Intereſſenrechnung 322

Erster Anhang 334

Zweiter Anhang 343

Einleitung und Vorbereitung.

Erstes Kapitel.

Von den Zahlen und ihrer Bezeichnungsart.

1. Was versteht man unter Zahl?

Man versteht darunter eine Menge gleichartiger Dinge, oder Dinge von einerlei Art.

2. Was sind gleichartige Dinge, oder Dinge von einerlei Art?

Es sind solche, bei denen man blos auf ihre übereinstimmenden Merkmale sieht.

3. Wie heißen die Dinge, an denen man blos ihre nichtübereinstimmenden Merkmale betrachtet?

Man nennt sie ungleichartige Dinge.

4. Wie lassen sich die Begriffe von gleichartigen und ungleichartigen Dingen durch ein Beispiel deutlich machen?

Man hat z. B. mehrere Geldstücke. Wenn man bei den einzelnen Geldstücken nur darauf sieht, daß jedes die Eigenschaft hat, um zum Gelde gezählt zu werden, so sind es lauter gleichartige Dinge, und sie bilden eine Zahl, vielleicht die Zahl zwanzig, wenn zwanzig solcher Geldstücke vorhanden sind. Diese zwanzig Geldstücke können

aber auch ungleichartig oder verschiedenartig seyn, insofern man darauf sieht, daß einige die Eigenschaft der Thaler, andere die Eigenschaft der Groschen, noch andere die Eigenschaft der Pfennige haben; und in so fern können sie keine Zahl ausmachen.

5. Haben diese gleichartigen Dinge, aus denen eine Zahl entsteht, einen besondern Namen?

Ja! Sie heißen in Bezug auf die Zahl Einheiten, z. B. bei der Zahl sechs Thaler, heißt jeder Thaler die Einheit dieser Zahl. Eine Einheit einer Zahl kann wieder andere Einheiten haben. Z. B. wenn man im gemeinen Leben sagt: zwei Schock Nüsse, so besteht diese Zahl aus zwei Einheiten, wovon jede 1 Schock Nüsse ist. Jede dieser zwei Einheiten besteht aber wieder aus sechzig Nüssen; und jede Nuß ist eine Einheit von ihr. — Ohne Einheiten kann man sich keine Zahl denken.

6. Wie entstehen Zahlen?

Zahlen entstehen durch Wiederholung der Einheit. Eins und Eins zusammen genommen nennt man Zwei; Zwei und Eins heißt Drei; Drei und Eins heißt Vier; Vier und Eins giebt Fünf; Fünf und Eins wird Sechs genannt; Sechs und Eins ist Sieben; Sieben und Eins ist Acht; Acht und Eins ist Neun; Neun und Eins heißt Zehn. Dies sind die zehn ersten Zahlen.

7. Wie entstehen die folgenden Zahlen?

Sie entstehen auf eben die Art. Man fängt nämlich nach Zehn wieder von vorn zu zählen an. Zehn und Eins; dafür sagt man Elf; Zehn und Zwei, wofür man Zwölf spricht; Zehn und Drei oder

Dreizehn; Zehn und Vier oder Vierzehn; und nun geht es auf dieselbe Art weiter, nämlich: Funfzehn, Sechzehn, Siebenzehn, Achtzehn, Neunzehn, ZehnZehn, wofür man Zwanzig sagt. Nun geht es fort: Ein und Zwanzig, Zwei und Zwanzig, u. s. f. bis Zehn und Zwanzig, wofür man Dreißig sagt, und auf ähnliche Art erhält man Vierzig, Funfzig, Sechzig, Siebzig, Achtzig, Neunzig. Für Zehn und Neunzig sagt man Hundert und zählt nun fort: Hundert und Eins, Hundert und Zwei u. s. f. Zweihundert, Dreihundert u. s. w. bis Zehnhundert. Für Zehnhundert sagt man Tausend. Nun gehts weiter: Tausend und Eins ꝛc. Zweitausend bis Zehntausend und von da bis Hunderttausend. Für Zehnhunderttausend oder Tausend Tausende sagt man eine Million; eine Million Millionen heißt eine Billion, eine Million Billionen heißt eine Trillion ꝛc.

8. Was sieht man aus dieser Entstehungsart der Zahlen?

Man sieht hieraus, daß immer nur von Eins bis Zehn gezählt wird, und daß man aus zehn einzelnen Dingen ein Zusammengesetztes macht; z. B. aus zehn Einheiten macht man ein Zusammengesetztes, welches Zehn heißt, aus zehn von diesem Zusammengesetzten macht man ein neues Zusammengesetztes, welches Hundert heißt u. s. w.

9. Was erhält man durch diese Art zu zählen?

Man erhält gewisse Klassen oder Ordnungen von Zahlen. Die erste Klasse heißt die der Einer, und begreift die Zahlen von Eins bis Neun in sich; die zweite Klasse heißt die Klasse der Zehner und

enthält die Zahlen von Zehn bis Neunzig; die dritte Klasse, die der Hunderte begreift die Zahlen von Hundert bis Neunhundert; die vierte Klasse, oder die der Tausende, enthält die Zahlen von Tausend bis Zehntausend; die fünfte, die der Zehntausende faßt die Zahlen von Zehntausend bis Hunderttausend. Dann folgen die sechste, siebente, achte, neunte ꝛc. Klasse, die Klassen der Hunderttausende, Millionen, zehn Millionen, Hunderttausende ꝛc. heißen und der Reihe nach die Zahlen von Hunderttausend bis Neunhunderttausend, von einer Million bis neun Millionen, von zehn Millionen bis neunzig Millionen, von hundert Millionen bis neunhundert Millionen in sich begreifen.

10. Wenn man eine oder mehrere Zahlen aufschreiben will, muß man sich da nothwendig der Namen derselben bedienen?

Nein! dies würde sehr unbequem seyn, wenn wir große Zahlen zu schreiben hätten. Man bedient sich gewöhnlich der Ziffern, um Zahlen schriftlich zu bezeichnen.

11. Was sind Ziffern?

Es sind Zeichen für Zahlen.

12. Was heißt Zeichen?

Zeichen heißt das, woran man eine Sache erkennt. So sind Worte Zeichen der Gedanken dessen, was jemand denkt. Eben so ist es mit den Ziffern und Zahlen. Jene sind schriftliche Zeichen von diesen, und man darf sie beide ja nicht verwechseln, welches leider nur zu oft auch in sonst guten Rechenbüchern geschieht.

13. Wie viel solcher Ziffern oder Zeichen von Zahlen giebt es, und welche sind es?

Es giebt im Ganzen neun solcher Ziffern oder Zahlzeichen. Es sind folgende: 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. Sie bezeichnen der Reihe nach die ersten neun Zahlen, nämlich Eins, Zwei, Drei, Vier, Fünf, Sechs, Sieben, Acht und Neun. Außerdem hat man noch ein Zeichen, welches die Abwesenheit jeder Zahl anzeigt. Dieses Zeichen ist 0 (Null).

14. Auf welche Weise werden die übrigen Zahlen, außer den zehn ersten, bezeichnet?

Man hat für die andern Zahlen keine besondern Zeichen; sondern man bezeichnet sie mit durch die angeführten.

15. Wie ist dies möglich?

Dies wird dadurch möglich, daß man diesen neun Ziffern einen verschiedenen Werth beilegt, nach der Verschiedenheit der Stellen von der Rechten nach der Linken, in denen sie stehen. In der ersten Stelle, oder wenn sie allein steht, bedeutet jede Ziffer diejenige Zahl, von der sie das Zeichen ist; in der zweiten Stelle bedeutet eine Ziffer zehnmal so viel, als wenn sie in der ersten Stelle, oder allein stünde; in der dritten bedeutet sie wieder zehnmal so viel, als wenn sie in der zweiten Stelle stünde; in der vierten wieder zehnmal so viel, als wenn sie in der dritten stünde, u. s. f. Allgemein: Jede Ziffer bedeutet in einer folgenden Stelle zehnmal so viel, als in der nächstvorhergehenden. Z. B:

Die Ziffer 1 bedeutet, wenn sie für sich al-

lein, oder in der ersten Stelle steht, die Zahl Eins, oder die Einheit. Setzt man sie aber in die zweite Stelle, welches man dadurch bewirkt, daß man rechts neben sie eine Null setzt (10), so bedeutet sie zehnmal so viel, als sie bedeuten würde, wenn sie für sich allein, oder in der ersten Stelle stünde; sie bedeutet demnach zehnmal eins, oder zehn. Wird sie in die dritte Stelle gesetzt, welches man dadurch bewirkt, daß man neben die vorige Null noch eine setzt (100), so bedeutet sie zehnmal so viel, als sie in der zweiten Stelle bedeutete, nämlich zehnmal zehn, oder hundert. In der vierten Stelle (1000) bedeutet sie zehnmal so viel als in der dritten, also zehn Hundert oder Tausend; in der fünften (10000) zehnmal Tausend, oder Zehntausend; in der sechsten (100000) zehnmal Zehntausend, oder Hunderttausend; in der siebenten (1000000) zehnmal Hunderttausend, oder eine Million; in der achten (10000000) zehnmal eine Million, oder zehn Millionen. Und so bedeutet die Ziffer 1, wenn man sie weiter in die neunte, zehnte, eilfte, zwölfte, dreizehnte ꝛc. Stelle von der Rechten gegen die Linke setzt, hundert Millionen, tausend Millionen, zehntausend Millionen, hunderttausend Millionen, tausendmaltausend Millionen, oder eine Billion u. s. w.

16. Was folgt hieraus?

Es folgt, daß allemal zehn Einheiten in einer vorhergehenden Stelle erst eine Einheit der nächstfolgenden ausmachen, oder es folgt, daß zehn Einer, einen Zehner, zehn Zehner einen Hun-

derter ꝛc. und umgekehrt ein Hunderter zehn Zehner, ein Zehner zehn Einer ausmacht.

17. Was haben die verschiedenen Stellen für Namen?

Die erste Stelle heißt die Stelle der Einer; die zweite, die Stelle der Zehner; die dritte, die Stelle der Hunderte; die vierte, die der Tausende, und die folgenden der Reihe nach, die Stelle der Zehntausende, Hunderttausende, der Millionen, zehn Millionen, Hundert Millionen ꝛc.

Folgendes Beispiel, nebst seiner Erklärung wird dies und das Vorhergehende deutlicher machen.

Hundert Millionen	Zehn Millionen	Millionen	Hunderttausende	Zehntausende	Tausende	Hunderte	Zehner	Einer.					
6	6	3	2	4	5	1	7	9	5	2	4	7.	
13.	12.	11.	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.	

Die unter jeder Ziffer der obigen Zahl geschriebene kleinere Ziffer zeigt die Stelle derselben an. —

Erklärung: die Ziffer 7 in der ersten Stelle, oder der Stelle der Einer gilt so viel Einer als ihr Name anzeigt, also sieben. Die Ziffer 4 in der zweiten Stelle, oder der Stelle der Zehner, gilt zehnmal mehr, als sie gelten würde, wenn sie in der ersten Stelle stünde. In der ersten Stelle

würde sie vier Einer gelten oder vier; sie gilt also hier in der zweiten zehnmal vier Einer, d. h. vier Zehner oder vierzig. Die Ziffer 2 in der dritten Stelle, oder der Stelle der Hunderte, gilt zehnmal so viel, als sie gelten würde, wenn sie in der vorhergehenden, oder zweiten Stelle stünde. In der zweiten Stelle würde sie aber zwei Zehner gelten. Sie gilt also hier in der dritten zehnmal zwei Zehner oder zwei Hunderte, und so gilt die Ziffer 5 in der vierten Stelle, fünf Tausend; die 9 in der dann folgenden neun Zehntausende, oder neunzig Tausend u. s. w.

18. Wie wird die Art bis zehn zu zählen, und immer von zehn zu zehn fortzuschreiten genannt?

Sie wird das Zehnersystem, oder das Decimalsystem oder decadische Zahlensystem genannt.

19. Ist dieses Zehnersystem, oder die Art bis auf zehn zu zählen durchaus nothwendig, oder kann es noch andere Arten zu zählen geben?

Da wir von Jugend auf daran gewöhnt sind, bis auf zehn zu zählen, so mag wohl Mancher denken, daß man auf eine andere Art gar nicht zählen könne. Allein diese Meinung ist falsch, und unser Zehnersystem ganz willkührlich. Man könnte z. B. eben so gut nur bis auf zwei zählen, und man brauchte dann nur die Zeichen 1 und 0, um alle nur mögliche Zahlen zu bezeichnen. Statt daß bei unserm Zehnersystem das Gesetz gilt, daß jede Ziffer in einer folgenden Stelle von der Rechten gegen die Linke, zehnmal so viel gilt, als wenn

sie in der nächst vorhergehenden stünde: statt diesem Gesetze würde nun natürlich bei der Art, bis auf zwei zu zählen, ein anderes und zwar folgendes gelten: die Ziffer 1 (denn weiter sind keine Zahlzeichen nöthig) gilt in jeder folgenden Stelle von der Rechten gegen die Linke, zweimal so viel, als sie in der vorhergehenden gelten würde. In der ersten Stelle gilt sie so viel, als ihr Name anzeigt, nämlich Eins; in der zweiten, zweimal eins, oder zwei; in der dritten zweimal zwei, oder vier; in der vierten zweimal vier, oder acht u. s. f. Die dreizehn ersten Zahlen würden nach diesem System so aussehen:

Eins	würde geschrieben	1
Zwei	= =	10
Drei	= =	11
Vier	= =	100
Fünf	= =	101
Sechs	= =	110
Sieben	= =	111
Acht	= =	1000
Neun	= =	1001
Zehn	= =	1010
Eilf	= =	1011
Zwölf	= =	1100
Dreizehn	= =	1101.

Tausend achthundert und vier und zwanzig würde auf diese Art geschrieben so aussehen:

11100100000.

Eben so könnte man auch bis vier zählen. Man brauchte dann nur die Ziffern 1, 2, 3 und

das Zeichen 0; und man müßte dann jede Ziffer in einer folgenden Stelle von der Rechten gegen die Linke viermal so viel bedeuten lassen, als sie bedeutet, wenn sie in der nächstvorhergehenden Stelle stünde. In der ersten Stelle bedeuteten die Ziffern natürlich so viel, als ihr Name anzeigt. Die Ziffer 1 bedeutete also in der ersten Stelle, oder wenn sie allein stünde, eins; in der zweiten viermal eins, oder vier; in der dritten viermal vier oder 16 u. s. f. Die ersten dreizehn Zahlen sähen demgemäß folgendermaßen aus:

Eins würde geschrieben	1
Zwei = =	2
Drei = =	3
Vier = =	10
Fünf = =	11
Sechs = =	12
Sieben = =	13
Acht = =	20
Neun = =	21
Zehn = =	22
Eilf = =	23
Zwölf = =	30
Dreizehn = =	31

Tausend acht hundert und vier und zwanzig sähe so aus:

130200.

Ueberhaupt ist zu merken, daß man auf ähnliche Art bis 3, 5, 6 u. s. f., oder über zehn hinaus bis eilf, zwölf (wo man aber noch neue Zahlzeichen erfinden müßte; da wir deren nur zehn

haben) zählen könnte, und jedesmal ein anderes Zahlensystem erhalten würde.

20. Wie ist man wohl darauf gekommen, gerade bis zehn zu zählen?

Die Ursache, warum man gerade bis auf zehn gezählt hat, mag wohl die seyn, daß die Menschen an ihren zehn Fingern zählen gelernt haben. Wir finden ja noch, daß Kinder und Personen, die im Rechnen nicht sehr bewandert sind, mit Hülfe ihrer Finger zählen.

21. Kannten die ältern Völker, z. B. die Griechen und Römer unsere Ziffern oder Zahlzeichen auch schon?

Nein! Diese Völker bezeichneten die Zahlen gewöhnlich durch die Buchstaben ihres Alphabets.

22. Wie sehen die Zahlzeichen der Römer aus?

Die Zahlzeichen der Römer, oder die sogenannten Römischen Ziffern sehen folgendermaßen aus:

Eins.	Zwei.	Drei.	Vier.	Fünf.	Sechs.	Sieben.
I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
Acht.	Neun.	Zehn.	Eilf.	Zwölf.	Dreizehn.	Vierzehn.
VIII.	IX.	X.	XI.	XII.	XIII.	XIV.
Funfzehn.	Sechzehn.	Siebzehn.	Achtzehn.	Neunzehn.		
XV.	XVI.	XVII.	XVIII.	XIX.		
Zwanzig.	Dreißig.	Vierzig.	Funfzig.	Sechzig.		
XX.	XXX.	XL.	L.	LX.		

Siebzig.	Achtzig.	Neunzig.	Hundert.
LXX.	LXXX.	LXXXX. oder XC.	C.

Zweihundert.	Fünfhundert.	Tausend.
CC.	D.	M.

Unsre Jahrzahl Tausend achthundert und vier und zwanzig würde also geschrieben:

MDCCCXXIV.

23. Wo stammen unsere Ziffern her?

Von den Arabern. Man nennt sie deswegen wohl auch arabische Ziffern.

Zweites Kapitel.

Eintheilung der Zahlen.

1. Wie werden die Zahlen eingetheilt?

Man kann sie verschiedentlich eintheilen; vornehmlich aber zerfallen sie

1) in ganze, gebrochene und gemischte;
2) in einziffrige und mehrziffrige;
3) in gerade und ungerade;
4) in benannte und unbenannte; und
5) in gleichartige und ungleichartige.

2. Was versteht man unter ganzen, gebrochenen und gemischten Zahlen?

Ganze Zahlen heißen solche, in denen die Einheit ein oder mehreremale völlig vorhanden ist; gebrochene sind solche, welche entstehen, wenn man nur einen Theil der Einheit ein oder einigemal nimmt; und gemischte sind solche, die aus ganzen und gebrochenen Zahlen zusammengesetzt sind.

3. Wie läßt sich dies durch ein Beispiel deutlich machen?

Wenn man die Zahl drei Groschen hat; so ist die Einheit, welche hier ein Groschen ist, dreimal genommen, und also dreimal in jener Zahl vorhanden. Sie ist daher eine ganze Zahl. Theilt man aber einen Groschen in drei gleiche Theile, und nimmt davon zwei; so erhält man eine gebrochene Zahl, zwei Drittheil Groschen; denn man hat den dritten Theil der Einheit zweimal genommen. Drei und zwei Drittheil Groschen, d. h. drei ganze Groschen und noch zwei Drittheile von einem Groschen, ist eine gemischte Zahl.

4. Was versteht man unter ein- und mehrziffrigen Zahlen?

Einziffrige Zahlen heißen solche, die nur durch eine einzige Ziffer bezeichnet werden; mehrziffrige aber, die durch mehrere dargestellt werden müssen.

5. Was sind gerade und ungerade Zahlen?

Gerade sind solche, die in zwei gleiche Theile zerlegt werden können; ungerade aber, wo dies nicht möglich ist. Z. B. die Zahl vier kann man in zwei gleiche Theile zerlegen; jeder Theil ist nämlich zwei; also ist vier eine gerade Zahl. Die Zahl drei hingegen kann man nicht in zwei Theile zerlegen, die einander gleich sind; deswegen heißt sie eine ungerade. Ungerade Zahlen sind: Eins, Drei, Fünf, Sieben, Neun, Eilf, Dreizehn u. s. w.; gerade hingegen: Zwei, Vier, Sechs, Acht, Zehn, Zwölf u. s. w.

6. Was versteht man unter benannten und unbenannten Zahlen?

Unter benannten versteht man solche, bei denen zugleich angezeigt wird, was für ein Ding die Einheit sey; unter unbenannten hingegen solche, bei denen nur die Menge der Einheiten angegeben ist, woraus sie bestehen, ohne daß die Einheit näher bestimmt ist. So ist z. B. sechs Thaler eine benannte Zahl; denn es ist hier angezeigt, daß die Einheit ein Thaler ist; hingegen Acht ist eine unbenannte Zahl; denn es ist hier blos die Menge der Einheiten, nämlich acht Einheiten, angegeben; aber nicht gesagt, was diese Einheit für ein Ding sey, ob sie ein Thaler, Groschen, Pfund, Loth ꝛc. sey.

7. Was sind endlich gleichartige und ungleichartige Zahlen?

Gleichartige (homogene) Zahlen sind solche, die sich auf einerlei Einheit beziehen, oder bei denen einerlei Einheit zum Grunde liegt; ungleichartige (heterogene) aber sind solche, die sich auf verschiedene Einheit beziehen. Z. B. sechs Thaler und zwei Thaler sind gleichartige Zahlen; denn bei beiden liegt einerlei Einheit zum Grunde, nämlich ein Thaler; aber fünf Pfund und drei Ellen sind ungleichartige Zahlen; denn es liegen verschiedene Einheiten ihnen zum Grunde; der ersten nämlich die Einheit ein Pfund; der zweiten die Einheit eine Elle. Eben so sind Einer und Einer gleichartig; aber Einer und Zehner, oder Zehner und Hunderte ungleichartig.

Drittes Kapitel.

Vom Numeriren oder der Numeration.

1. Was versteht man unter Numeration?

Unter dem Numeriren oder der Numeration versteht man die Kunst, jede mit Ziffern bezeichnete Zahl mit Worten richtig auszusprechen; und im Gegentheil jede mit Worten ausgesprochene Zahl durch die bekannten Ziffern richtig zu bezeichnen.

2. Wie viel Stücke gehören also zur Numeration?

Zwei; das Zahlenlesen und Zahlenschreiben.

3. Wie werden Zahlen, die mit Ziffern bezeichnet sind, gelesen?

Nach dem, was im ersten Kapitel von der Bezeichnung der Zahlen gesagt worden, ist die einfache Regel diese: man nenne jede Ziffer, oder man spreche jede einzelne Ziffer der mit Ziffern geschriebenen Zahl einzeln aus, und zwar von der Linken gegen die Rechte zu, und gebe ihr den Namen, der ihr nach der Stelle, in welcher sie steht, zukommt. Z. B.

436

würde eigentlich gelesen: vier Hunderte, drei Zehner und sechs Einer.

4. Liest man wirklich auf diese Art?

Es ist nicht gebräuchlich so zu lesen; sondern der Sprachgebrauch bringt einige Veränderungen hervor. Man merke sich daher folgende Regeln:

I) Sind nur 1, 2 oder höchstens 3 Ziffern zu lesen, so muß man

1) den Namen Einer weglassen, und blos sagen: eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht, neun.
2) Ist es gebräuchlich, anstatt eins, zwei, drei, vier u. s. w. Zehner zu sagen: zehn, zwanzig, dreißig, vierzig u. s. w.
3) Darf man die Zehner nicht vor den Einern aussprechen, wie es eigentlich geschehen müßte; sondern umgekehrt.
4) Lasse man bei einzelnen Zehnern das Wörtchen „und" weg z. B. statt drei und zehn sage man dreizehn; u. s. w.
5) Die Hunderte spreche man vor den Zehnern und Einern aus.

5. Wie läßt sich dies durch ein Beispiel deutlich machen?

Es sey die dreiziffrige Zahl 436 gegeben; man soll sie lesen d. h. mit Worten aussprechen. Nach dem früheren bedeutet die 6, da sie in der ersten Stelle steht, Einer; die 3, in der zweiten Stelle, Zehner; und die 4, in der dritten, Hunderte; und dem gemäß würde die Zahl auszusprechen seyn:

Vier Hunderte, drei Zehner und sechs Einer.

Aber der Sprachgebrauch erfordert:

1) daß man statt sechs Einer sage: sechs;
2) daß man statt drei Zehner sage: dreißig;
3) daß man nicht die Zehner vor den Einern, sondern diese vor jenen ausspricht; nicht dreißig und sechs; sondern sechs und dreißig.

Die mit Ziffern geschriebene Zahl 436 wäre also nun zu lesen:

Vierhundert und sechs und dreißig.

Eben so wäre die dreiziffrige Zahl 917 zu lesen nicht Neunhundert und sieben und zehn, sondern Neunhundert und siebzehn.

6. Wie kann man eine mehr als dreiziffrige Zahl lesen?

II) Wenn mehr als drei, aber nicht über sechs Ziffern vorhanden sind, so schneide man von der Rechten zur Linken drei Ziffern ab, so daß also zwei Abtheilungen entstehen; spreche jede dieser Abtheilungen nach dem Vorigen (Fr. 4) aus, und gebe der zweiten Abtheilung, von der Rechten gegen die Linke, den Namen „Tausende."

Z. B. Wäre die mit sechs Ziffern geschriebene Zahl 239875 zu lesen, so schneide man von der Rechten nach der Linken zu drei Ziffern ab, nämlich: 239|875. Man spricht nun jede dieser Abtheilungen nach dem Vorigen aus. Die zweite Abtheilung von der Rechten gegen die Linke, in welcher die drei Ziffern 239 stehen, würde also heißen: zweihundert und neun und dreißig; die erste Abtheilung aber mit den Ziffern 875: achthundert und fünf und siebenzig. Und nun giebt man der zweiten Abtheilung den Namen Tausende, so daß die ganze Zahl nun zu lesen ist:

Zweihundert und neun und dreißig Tausend achthundert und fünf und siebenzig.

46|321 würde heißen: sechs und vierzig Tausend, dreihundert und ein und zwanzig; und

5416 ist zu lesen: fünf Tausend vierhundert und sechzehn.

7. Wie verhält es sich, wenn die Zahl mehr als sechs Ziffern hat?

III) Sind über sechs Ziffern da, so viel ihrer auch seyn mögen, so mache man von der Rechten gegen die Linke Abtheilungen, von denen jede sechs Ziffern in sich faßt (die letzte kann natürlich auch weniger haben), spreche jede dieser Abtheilungen nach den Vorschriften in I. und II. aus, und gebe der zweiten den Namen „Millionen;“ der dritten den Namen „Billionen;“ der vierten den Namen „Trillionen;“ der fünften den Namen „Quadrillionen“ u. s. w., z. B. wenn die mehr als sechsziffrige Zahl

934167234582 75

zu lesen gegeben ist, so mache man von der Rechten gegen die Linke Abtheilungen, von denen jede sechs Ziffern enthält. Die letzte Abtheilung kann auch weniger als sechs Ziffern enthalten; also:

dritte Abtheil. zweite Abth. erste Abtheil.

93 | 416723 | 458275.

Nun spreche man die in jeder Abtheilung stehenden Ziffern aus, wie es in dem vorigen gelehrt worden ist, und gebe der zweiten Abtheilung den Namen Millionen, und der dritten den Namen Billionen. Die ganze Zahl würde also heißen:

drei und neunzig Billionen, vierhundert und sechzehn Tausend, siebenhundert und drei und

zwanzig Millionen, vierhundert acht und funfzig Tausend, zweihundert und fünf und siebenzig.

Eben so wäre die mit Ziffern geschriebene Zahl

853679245

zu lesen: achthundert und drei und funfzig Millionen sechshundert und neun und siebenzig Tausend, zweihundert und fünf und vierzig; und

97851423998267583416

würde mit Worten ausgesprochen heißen:

Sieben und neunzig Trillionen, achthundert und ein und funfzig Tausend, vierhundert und drei und zwanzig Billionen, neunhundert und acht und neunzig Tausend, zweihundert und sieben und sechzig Millionen fünfhundert und drei und achtzig Tausend vierhundert und sechzehn.

8. Sind besondere Regeln nöthig, wenn in irgend einer Stelle, oder in mehrern Null (0) steht?

Nein! denn da, wie früher gesagt worden (1,13), die 0 nur die Abwesenheit einer Zahl anzeigt, so ist es natürlich, daß beim Lesen einer mit Ziffern geschriebenen Zahl diejenigen Stellen, wo 0 steht, ganz übergangen werden; z. B.

302

wird, da die 0 hier in der zweiten Stelle steht, und also anzeigt, daß keine Zehner vorhanden sind, so gelesen:

dreihundert und zwei.

Eben so wird

6010230

ausgesprochen: sechs Millionen, zehn Tausend, zweihundert und dreißig.

810000100 heißt: Achthundert und zehn Millionen und Hundert.

9. Kann man die Zahlen nicht auch auf eine andere Art, als die bis jetzt beschriebene, lesen?

O ja! Man kann auch die Einheiten der höhern Stellen mit dem Namen der niedern bezeichnen. Z. B. die mit Ziffern geschriebene Zahl 2146 kann man auch anstatt zwei Tausend, ein Hundert und sechs und vierzig lesen: ein und zwanzig Hundert und sechs und vierzig; denn die 2 Tausende sind so viel als 20 Hunderte. Eben so kann man 8103 lesen: ein und achtzig Hundert und drei. Aus demselben Grunde kann man 1630 lesen: Hundert und drei und sechzig Zehner; 4800, acht und vierzig Hunderte u. s. w.

10. Was hat man zu merken, um eine mit Worten ausgesprochene Zahl durch Ziffern zu bezeichnen, oder zu schreiben?

Wer das vorige gefaßt hat, dem wird es nicht schwer werden, jede Zahl mit Ziffern zu theilen. Man merke jedoch folgendes:

1) bedenke man wohl, daß die Einer auf der ersten Stelle, von der Rechten zur Linken stehen müssen; die Zehner auf der zweiten; die Hunderte auf der dritten; die Tausende auf der vierten u. s. w.

2) muß man sorgfältig darauf achten, ob in der Zahl, die mit Worten geschrieben ist oder vorgesagt wird, eine von den Klassen der

Zahlen, etwa Einer, Zehner, Hunderte u. s. w. fehlen. Ist dies der Fall, so muß man

3) in die gehörige Stelle das Zeichen 0 setzen.

Wäre z. B. die Zahl dreihundert und vier mit Ziffern zu schreiben, so schreibe man die Ziffer 3 hin, welche Hunderte bedeuten soll; rechts neben sie würde diejenige Ziffer kommen, welche die Zehner anzeigte; da aber in der vorliegenden Zahl keine Zehner vorkommen, so setze man das Zeichen 0 hin (30); rechts neben diese 0 setze man nun die Ziffer 4, die dann, da sie in die erste Stelle zu stehen kommt, vier Einer, oder vier bedeutet. Obige Zahl würde also so geschrieben: 304.

Vier und sechzig Tausend muß, da weder Hunderte, Zehner noch Einer da sind, geschrieben werden: 64000; und achthundert und drei Tausend: 803000.

11. Ist es denn durchaus nothwendig, daß 0 gesetzt wird, wenn aus einer Klasse keine Zahlen vorhanden sind? Und warum?

Es ist durchaus nothwendig, damit jede Ziffer in ihre gehörige Stelle kommt. Wollte man bei dem angeführten ersten Beispiele die Zahl dreihundert und vier ohne Null, etwa so 34, schreiben, so hieße dies nicht dreihundert und vier, sondern vier und dreißig. Damit die Ziffer 3, welche Hunderte bedeuten soll, in die dritte Stelle komme, muß man in die Stelle der Zehner, weil keine vorhanden sind, 0 setzen. Warum man die 0 gerade in die zweite Stelle setzt und nicht in die

erste (obgleich dadurch die 3 auch in die dritte Stelle käme), ist einleuchtend.

12. Setzt man in alle diejenigen Stellen, aus welchen keine Zahlen vorhanden sind, Nullen?

Nein! Nur in diejenigen, wo es die Absicht ihres Gebrauchs erfordert. Z. B. die Zahl dreihundert und sechs muß geschrieben werden: 306. Aus der zweiten Klasse ist keine Zahl da, nämlich kein Zehner. Es muß also in die zweite Stelle 0 gesetzt werden, damit die 3 in die dritte Stelle zu stehen kommt, weil sie Hunderte bedeuten soll. Aus der vierten Klasse, oder der der Tausende, aus der fünften ꝛc. sind nun zwar auch keine Zahlen vorhanden; allein man schreibt deswegen doch nicht 00306. Denn es ist jetzt nicht nöthig, diese Nullen zu setzen. Durch sie wird die Stelle der Ziffern 3 und 6 also auch ihr Werth nicht geändert.

13. Was folgt hieraus?

Daß man einer mit Ziffern geschriebenen Zahl links so viele Nullen anhängen kann, als man will, ohne daß dadurch der Werth der Ziffern und der ganzen Zahl im Mindesten geändert wird. Etwas anders ist es, wenn man rechts Nullen anhängt; dann werden die Stellen der Ziffern verändert; also auch ihr Werth und der Werth der ganzen Zahl.

14. Wie können sich Anfänger das Zahlenschreiben erleichtern?

Dadurch, daß sie sich durch Striche Klassen machen, und sie mit 1, 2 ꝛc. von der Rechten zur Linken bezeichnen, und dann jede Ziffer nach ihrem

Werthe in die gehörige Klasse setzen, nämlich die Ziffer, die Tausende bedeuten soll, in die vierte; die, welche Hunderte anzeigt, in die dritte ꝛc.; z. B. man soll folgende Zahl mit Ziffern schreiben: vierhundert und sechs Millionen, dreihundert und siebenzig Tausend und ein und neunzig. Man verfahre so:

10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.
	4	0	6	3	7	0	0	9	1

Man mache durch senkrechte Striche Klassen, so viele man zu brauchen gedenkt, und bezeichne sie durch die Ziffern 1, 2, 3 u. s. w. Nun schreibe man die Ziffer 4 in die 9te Stelle, da die Zahl vierhundert Millionen enthält. Denn die 9te Stelle von der Rechten gegen die Linke bedeutet ja hundert Millionen. Zehn Millionen hat die Zahl nicht, folglich setzt man in die achte Stelle, wo die zehn Millionen hingehören, das Zeichen 0. Um die in der Zahl folgenden sechs Millionen zu schreiben, setze man die Ziffer 6 in die siebente Stelle, weil in diese Stelle die einfachen Millionen hingehören, und so fahre man fort, bis die Zahl ganz geschrieben ist. Fährt ein Anfänger einige Zeit fort, sich auf diese Art das Zahlenschreiben zu erleichtern, so wird er gar bald eine gewisse Fertigkeit darin erwerben.

Viertes Kapitel.

Von der Rechenkunst, ihrem Begriff, ihrer Eintheilung und ihrem Nutzen.

1. Was versteht man unter Rechenkunst?

Unter Rechenkunst (Arithmetik) versteht man die Wissenschaft, welche die Natur der Zahlen untersucht, und die darauf gegründeten Veränderungen, die mit den Zahlen vorgenommen werden können, lehrt. Oder: sie ist diejenige Wissenschaft, welche die Eigenschaft der Zahlen lehrt, und aus einigen bekannten andere unbekannte finden lehrt.

2. Von welcher andern Wissenschaft ist die Rechenkunst oder Arithmetik ein Theil?

Von der Mathematik, oder der Wissenschaft von den Größen überhaupt.

3. Wie wird die Rechenkunst eingetheilt?

Man kann sie

1) in niedere und höhere; und vielleicht
2) in theoretische und practische eintheilen.

4. Was versteht man unter niederer und höherer Rechenkunst?

Unter niederer Rechenkunst versteht man denjenigen Theil der Rechenkunst, der die gemeinern, einfachern und speciellern Rechnungen; unter höherer aber den Theil derselben, welcher die höhern, zusammengesetztern und allgemeinern Rechnungen lehrt.

5. Was ist theoretische, was practische Rechenkunst?

Theoretisch kann man die Rechenkunst nennen,

wenn sie sich mit unbenannten Zahlen beschäftigt; practisch aber, wenn sie mit benannten Zahlen zu thun hat.

6. Kannten die Griechen und Römer unsere Art zu rechnen auch?

Nein! Diese Völker haben ganz anders gerechnet wie wir; jedoch kennen wir ihre Art und Weise zu rechnen nicht, ob wir gleich aus ihren Schriften sehen, daß sie die allgemeinen Regeln des Rechnens wohl kannten.

7. Wo stammt unsere Art zu rechnen her?

Sie stammt eben daher, wo unsere Ziffern herstammen, nämlich von den Arabern.

8. Ist die Rechenkunst wichtig?

Ja, sie ist sehr wichtig, und man kann wohl sagen unentbehrlich, da ihr Nutzen so groß ist.

9. Worin besteht der Nutzen der Rechenkunst?

Die Rechenkunst übt und schärft den Verstand, das Gedächtniß und die Urtheilskraft gar sehr, und man kann ohne sie nicht nur mehrere Wissenschaften, als Mathematik, Naturlehre, Astronomie ꝛc., gar nicht, oder nicht gründlich erlernen; sondern sie ist auch im gemeinen Leben ganz unentbehrlich. Der Bauer, der Handwerker, der Kaufmann, die Hausfrau u. s. w. müssen rechnen können, wenn sie sich nicht oft Schaden zufügen und bevortheilen lassen wollen.

Erstes Hauptstück.

Von ganzen, unbenannten Zahlen.

Fünftes Kapitel.

Von den Rechnungsarten im Allgemeinen.

1. Was heißt rechnen?

Rechnen heißt: aus gegebenen bekannten Zahlen andere unbekannte finden, die auf die gegebenen eine verlangte Beziehung haben.

2. Was versteht man unter Rechnungsarten?

Man versteht darunter die Art und Weise zu rechnen; oder die Art und Weise, aus bekannten Zahlen andere unbekannte zu finden. Man versteht auch unter Rechnungsarten die Veränderungen, die man mit Zahlen vornehmen kann.

3. Was für Veränderungen kann man mit einer Zahl vornehmen?

Im Ganzen kann man zwei Veränderungen mit ihr vornehmen; denn man kann sie entweder größer machen, oder vermehren; oder kleiner machen, vermindern. Auf diese beiden Veränderungen laufen alle übrigen hinaus.

4. Was heißt eine Zahl vermehren?

Es heißt: zu einer Zahl entweder noch eine oder mehrere andere, oder sie selbst noch ein oder mehreremal setzen.

5. Was heißt eine Zahl zu einer andern setzen?

Es heißt: die Einheiten der einen Zahl zu den Einheiten der andern Zahl zählen?

6. Auf wie vielerlei Art läßt sich also eine Zahl vermehren?

Auf zweierlei Weise. Entweder man setzt zu ihr

1) eine oder mehrere andere Zahlen hinzu; oder
2) sie selbst ein oder einigemal.

7. Wie läßt sich dies durch ein Beispiel deutlich machen?

Wenn man zu der Zahl 483 noch andere Zahlen, z. B. 8, 9, 36, hinzusetzt; so wird sie größer, oder vermehrt. Eben so wird sie vermehrt, wenn man zu ihr noch einmal 483, und noch einmal 483 setzt; nur auf eine etwas andere Art wie vorher.

8. Haben diese beiden Arten, eine Zahl zu vermehren, besondere Benennungen?

Ja! Die erste Art heißt Addiren (hinzufügen, zusammenzählen); die zweite aber Multipliciren (vervielfältigen).

9. Was heißt eine Zahl vermindern?

Es heißt: von ihr eine andere Zahl, die natürlich nicht größer als sie seyn darf, hinwegnehmen; oder eine Zahl vermindern, heißt: von ihren Einheiten die Einheiten einer andern Zahl hinwegnehmen. Durch dieses Wegnehmen wird die erste Zahl natürlich kleiner, oder vermindert.

10. Kann dies auf mehr als auf Eine Art geschehen?

Ja, wieder auf zwei verschiedene Arten, wie das Vermehren; denn

1) man kann von einer Zahl eine andere Zahl nur einmal wegnehmen; oder

2) man kann sie so vielmal wegnehmen, als es möglich ist.

11. Wie kann dies durch ein Beispiel verdeutlicht werden?

Z. B. Von der Zahl 24 kann man eine andere Zahl entweder ein einzigesmal wegnehmen; oder man kann sie erst einmal wegnehmen, dann wieder einmal, dann noch einmal, so oft es möglich ist.

12. Was für Namen haben diese zwei verschiedenen Arten eine Zahl zu vermindern?

Die erstere Art heißt Subtrahiren (abziehen), die letztere Dividiren (theilen).

13. Wie viel Veränderungen der Zahlen, oder wie viel Rechnungsarten lassen sich also denken?

Eigentlich lassen sich nach dem Vorigen nur zweierlei Veränderungen mit Zahlen vornehmen, oder es giebt nur zwei Rechnungsarten, eine vermehrende und vermindernde. Da jede aber wieder in 2 Unterarten zerfällt, so nimmt man gewöhnlich 4 Rechnungsarten oder Species an, und läßt sie, eigentlich mit Unrecht, so auf einander folgen: Addition, Subtraction, Multiplication, Division.

14. Giebt es außer diesen 4 Rechnungsarten noch andere?

Wenn man das Wort „Rechnungsart" in seiner eigentlichen Bedeutung nimmt, so giebt es

keine mehr. Alle andere sogenannten Rechnungsarten sind weiter nichts als eine Anwendung und Zusammensetzung dieser.

Sechstes Kapitel.

Von der Addition oder dem Addiren.

1. Was heißt Addiren?

Addiren heißt zu einer Zahl noch eine oder mehrere andere setzen; oder, was mit diesem auf eins hinausläuft, Addiren heißt die Summe 2 oder mehrerer gegebenen Zahlen finden.

2. Was heißt Summe?

Summe ist eine Zahl, die zwei oder mehrere Zahlen zusammen genommen gleich ist. Addiren heißt also mit andern Worten, aus 2 oder mehrern gegebenen Zahlen eine andere Zahl finden, die so groß ist als jene gegebenen Zahlen zusammengenommen. Wenn ich z. B. aus den mir gegebenen Zahlen 3, 6, 8, eine andere Zahl finde, die so groß ist als diese 3 Zahlen zusammengenommen, so habe ich sie addirt.

3. Was heißt also Addition?

Addition heißt die Art und Weise gegebene Zahlen zu addiren, oder ihre Summe zu finden.

4. Wie nennt man die Zahlen, welche addirt werden sollen, gewöhnlich?

Man nennt sie Rester, oder wohl auch summirende Größen; und die Zahl, die ihnen zusammengenommen gleich ist, wird, wie schon gesagt, Summe, oder auch Aggregat genannt.

5. Hat man ein Zeichen, um anzuzeigen, daß Zahlen addirt werden sollen?

Ja! Man bedient sich, um dieses anzuzeigen, eines stehenden Kreutzes +. Es wird gelesen mehr oder plus. Z. B. 438 + 6 + 213 + 12 heißt: 438 plus 6 plus 213 plus 12, d. h. diese Zahlen sollen addirt werden.

6. Was für Zahlen können nur addirt werden?

Nur gleichartige (2, 7) Zahlen kann man addiren, z. B. Einer und Einer, Zehner und Zehner u. s. w.

7. Was muß man können, ehe man größere Zahlen addiren lernen will?

Man muß erst die einfachen Zahlen oder Einer unter sich addiren können.

8. Wie kann man das lernen?

Man zählt zu jedem Einer erst 1, dann 2, dann 3 u. s. f. bis 9 und merkt sich die Summe, die man da erhält. Fährt man mit allen Einern so fort und macht sich eine Tabelle, so erhält man das sogenannte Ein und Ein, welches Anfänger sich recht geläufig machen müssen. Es sieht so aus:

Ein und Ein.

1 und 1 ist 2	4 und 1 ist 5	7 und 1 ist 8
1 — 2 — 3	4 — 2 — 6	7 — 2 — 9
1 — 3 — 4	4 — 3 — 7	7 — 3 — 10
1 — 4 — 5	4 — 4 — 8	7 — 4 — 11
1 — 5 — 6	4 — 5 — 9	7 — 5 — 12
1 — 6 — 7	4 — 6 — 10	7 — 6 — 13
1 — 7 — 8	4 — 7 — 11	7 — 7 — 14
1 — 8 — 9	4 — 8 — 12	7 — 8 — 15
1 — 9 — 10	4 — 9 — 13	7 — 9 — 16
2 — 1 — 3	5 — 1 — 6	8 — 1 — 9
2 — 2 — 4	5 — 2 — 7	8 — 2 — 10
2 — 3 — 5	5 — 3 — 8	8 — 3 — 11
2 — 4 — 6	5 — 4 — 9	8 — 4 — 12
2 — 5 — 7	5 — 5 — 10	8 — 5 — 13
2 — 6 — 8	5 — 6 — 11	8 — 6 — 14
2 — 7 — 9	5 — 7 — 12	8 — 7 — 15
2 — 8 — 10	5 — 8 — 13	8 — 8 — 16
2 — 9 — 11	5 — 9 — 14	8 — 9 — 17
3 — 1 — 4	6 — 1 — 7	9 — 1 — 10
3 — 2 — 5	6 — 2 — 8	9 — 2 — 11
3 — 3 — 6	6 — 3 — 9	9 — 3 — 12
3 — 4 — 7	6 — 4 — 10	9 — 4 — 13
3 — 5 — 8	6 — 5 — 11	9 — 5 — 14
3 — 6 — 9	6 — 6 — 12	9 — 6 — 15
3 — 7 — 10	6 — 7 — 13	9 — 7 — 16
3 — 8 — 11	6 — 8 — 14	9 — 8 — 17
3 — 9 — 12	6 — 9 — 15	9 — 9 — 18

9. Was hat man zu beobachten, wenn man Zahlen addiren will?

Die Regel heißt: man schreibe die gegebenen Zahlen, welche addirt werden sollen, so unter einander, daß diejenigen Ziffern jedesmal unter einander zu stehen kommen, die in gleichen Stellen sich befinden; nämlich Einer unter Einer, Zehner unter Zehner, Hunderte unter Hunderte u. s. w.

10. Warum ist dies nothwendig?

Weil nur gleichartige Zahlen addirt werden können (6).

11. Was hat man nun weiter zu thun?

Man macht unter die so unter einander gesetzten Zahlen einen Strich, fängt bei den Ziffern in der niedrigsten Stelle, oder bei den Einern an, und zählt diese zusammen. Nun untersucht man, ob vielleicht in dieser Summe der Einer ein oder mehrere Zehner liegen, wobei man sich nur zu erinnern braucht, daß allemal 10 Einer einen Zehner machen. Ist dies der Fall, d. h. liegen ein oder mehrere Zehner in der Summe, so nimmt man sie heraus, und schreibt die etwa übrig gebliebenen Einer unter den Strich, und zwar gerade unter die Einer. Sollte außer den herausgenommenen Zehnern kein Einer mehr in der Summe liegen, so schreibt man 0 unter, was man ja nicht unterlassen darf. Nun geht man weiter zu der folgenden Stelle, oder der Stelle der Zehner, und addirt die in ihr stehenden Ziffern auf eben die Art, wie die Einer, und

nimmt überdies noch diejenigen Zehner hinzu, welche man aus der Summe der Einer gezogen hat. Nun untersucht man, ob etwa in der so gefundenen Summe der Zehner ein oder mehrere Hunderte liegen, wobei man sich nur wieder zu erinnern braucht, daß jedesmal 10 Zehner einen Hunderten machen. Ist es der Fall, so zieht man die Hunderte heraus, und schreibt nur die etwa übrig bleibenden Zehner unter den Strich, in die Stelle der Zehner, bleibt gar kein Zehner übrig, so schreibt man 0 unter. Die herausgegebenen Hunderte nimmt man noch dazu, wenn man die Ziffern in der folgenden dritten Stelle oder die Stelle der Hunderte addirt. Auf ähnliche Art verfährt man mit allen folgenden Ziffern in folgenden Stellen. Hat man die Ziffern in der letzten Stelle addirt, so schreibt man natürlich die ganze gefundene Summe unter den Strich.

12. Wie läßt sich dies durch ein Beispiel deutlich machen?

Z. B. Es sind folgende Zahlen gegeben. 6785, 345, 3910, 39, 5. Man soll sie addiren. Zuerst schreibt man sie nach der angeführten Regel (9) so unter einander, daß Einer unter Einer, Zehner unter Zehner u. s. w zu stehen kommen, und zieht dann einen Strich:

6785
345
3910
39
5

11084

Nun fängt man bei den Einern an, und addirt, oder zählt sie zusammen, und zwar folgendermaßen: 5 und 9 ist 14 und 5 giebt 19 und nochmals 5 ist 24. In diesen 24 Einern liegen zwei Zehner und 4 Einer. Die 2 Zehner nimmt man heraus und behält sie, wie man zu sagen pflegt, im Sinn, und schreibt nur die übrigen Einer, nämlich 4, unter den Strich unter die Einer. Dann geht man in die Stelle der Zehner, und addirt die in allen gegebenen Zahlen vorhandenen Zehner auf eben die Art, wie die Einer, nämlich: 3 und 1 ist 4 und 4 sind 8 und 8 sind 16, und die 2 Zehner, die wir aus der Summe der Einer genommen hatten, noch dazu giebt 18. In diesen 18 Zehnern liegt ein Hunderter und 8 Zehner. Den Hunderter nimmt man heraus und behält ihn im Sinn; die 8 Zehner schreibt man unter den Strich. Dies geschieht, indem man die Ziffer 8 in die zweite Stelle in der Summe setzt, nämlich links neben die vorige Ziffer. Den Hunderter zählt man nun zu der Summe der folgenden Hunderte, bei denen und den Tausenden man ganz auf ähnliche Art verfährt.

13. Erhält man durch diese Verfahrungsart auch wirklich die Summe der gegebenen Zahlen?

Ja! Denn die sämmtlichen gegebenen Zahlen bestehen aus ihren Einern, Zehnern, Hunderten u. s. w. Zählt man also diese nach einander einzeln zusammen, so muß ihre Summe die Summe der ganzen Zahlen geben.

Zur Erläuterung dient, wenn man die zur

Addition gegebenen Zahlen in ihre Ordnungen oder Klassen zerlegt und sie so addirt. Z. B.

6785 ist so viel als 6 Tausende, 7 Hund., 8 Zehn., 5 Ein.

345	=	=	—	=	=	3	=	4	=	5 =
3910	=	=	3	=	=	9	=	1	=	0 =
39	=	=	—	=	=	—	=	3	=	9 =
5	=	=	—	=	=	—	=	—	=	5 =
11084			9 Tausende., 19 Hund., 16 Zeh., 24 E.							

oder

wenn man die in den einzelnen Summen liegenden Einheiten der nächst höhern Klasse aus ihnen heraus nimmt und sie zu den Einheiten dieser höhern Klasse addirt, so erhält man

11 Tausende, 0 Hundert, 8 Zehner, 4 Einer

oder

11084.

14. Liegt etwas daran, in welcher Folge die zu addirenden Zahlen unter einander gesetzt werden, und ob man von oben herunter oder von unten hinauf addirt?

Nein! Hierauf kommt gar nichts an. 8 und 3 ist eben so viel als 3 und 8, nämlich 11. Sind z. B. folgende Zahlen zu addiren: 406, 738, 26; so ist es einerlei, in welcher Ordnung man sie unter einander setzt,

	406		738		26	
ob so	738	oder	26	oder	406	u. s. w.
	26		406		738	
	1170		1170		1170	

wenn man nur die angegebene Regel beobachtet, nämlich Einer unter Einer, Zehner unter Zehner ꝛc.

zu setzen. In allen diesen Fällen erhält man gleiche Summen. Eben so gleichgültig ist es, ob man von oben herunter, oder von unten hinaufwärts addirt. Nur muß man immer bei der ersten Stelle, oder den Einern anfangen, und nach und nach von der Rechten zur Linken gehen.

15. Warum ist es nöthig, daß man bei den Einern anfängt und von der Rechten zur Linken fortgeht?

Es ist darum nöthig, damit man die in der Summe der Einer liegenden Zehner sogleich zu den folgenden Zehnern, die in der Summe der Zehner liegenden Hunderte zu den folgenden Hunderten u. s. w. nehmen kann.

Siebentes Kapitel.

Vom Subtrahiren oder der Subtraktion.

1. Was heißt Subtrahiren?

Subtrahiren (abziehen) heißt eine Zahl von einer andern einmal hinwegnehmen. Was dann von dieser andern Zahl übrig bleibt, heißt Rest (Unterschied, Differenz).

2. Was zeigt der Rest an?

Um wie viel die eine Zahl größer ist, als die andere, oder um wie viel sie die andere übertrifft.

3. Wie kann man daher „Subtrahiren“ noch erklären?

Man kann daher auch sagen: eine Zahl von einer andern subtrahiren, heißt eine dritte Zahl,

den Rest, finden, welcher anzeigt, um wieviel die eine Zahl größer ist als die andere.

4. Was heißt nun Subtraktion?

Subtraktion ist die Art und Weise, wie man subtrahirt, oder wie man den Rest findet.

5. Wie viel Zahlen werden bei der Subtraktion allemal erfordert?

Jedesmal zwei; nämlich eine, von welcher abgezogen werden soll und eine, welche abgezogen werden soll.

6. Was haben die beiden Zahlen für Namen?

Diejenige Zahl, von welcher die andere abgezogen werden soll, heißt Minuend (die zu vermindernde). Diejenige aber, welche abgezogen werden soll, Subtrahend (abzuziehende, wegzunehmende), auch wohl Minuens (die vermindernde d. h. die, welche vermindert).

7. Was für Benennungen hat man noch für diese Zahlen?

Man nennt dir erstere Zahl den Minuenden, auch wohl Hauptzahl oder Vollzahl; die zweite, den Subtrahenden, Abzug.

8. Wie muß der Minuend, oder die Hauptzahl allemal beschaffen seyn?

Sie muß entweder eben so groß oder größer seyn als der Subtrahend; denn wäre sie kleiner als der Subtrahend, so könnte man ja diesen nicht von ihr wegnehmen.

9. Was für ein Zeichen gebraucht man, um anzudeuten, daß eine Zahl von einer andern subtrahirt werden soll?

Man bedient sich dazu eines horizontalen Stri-

ches (—). Er wird gelesen weniger (oder lateinisch minus), z. B. 8 — 4 wird gelesen 8 weniger 4, d. h. von 8 soll 4 abgezogen werden.

10. Was für Zahlen können nur von einander subtrahirt werden?

Gleichartige (homogene), z. B. Einer von Einern, Zehner von Zehnern ꝛc., Ungleichartige, z. B. Einer von Zehnern kann man nicht subtrahiren.

11. Was muß man erst können, ehe man größere Zahlen von einander subtrahiren kann?

Man muß erst recht geläufig Einer von Einern zu subtrahiren im Stande seyn.

12. Wie kann man das lernen?

Man kann es entweder an den Fingern lernen; oder man nimmt Rechenpfennige oder etwas Aehnliches, das deren Stelle vertreten kann; macht dann Häufchen von 1, 2, 3, 4 u. s. f. Stücken; nimmt dann zuerst 1 von jedem Häufchen hinweg und merkt sich, was bei jedem übrig bleibt. Dann nimmt man zwei von jedem hinweg, wo dies möglich ist, dann 3 u. s. w.

Folgende Tabelle, die gewöhnlich das Ein von Ein genannt wird, mag dazu dienen, dem Anfänger das Subtrahiren der Einer von Einern geläufig zu machen:

Ein von Ein.

1 von 1 bleibt 0	3 von 3 bleibt 0	6 von 6 bleibt 0
1 — 2 — 1	3 — 4 — 1	6 — 7 — 1
1 — 3 — 2	3 — 5 — 2	6 — 8 — 2
1 — 4 — 3	3 — 6 — 3	6 — 9 — 3
1 — 5 — 4	3 — 7 — 4	
1 — 6 — 5	3 — 8 — 5	7 — 7 — 0
1 — 7 — 6	3 — 9 — 6	7 — 8 — 1
1 — 8 — 7		7 — 9 — 2
1 — 9 — 8	4 — 4 — 0	
	4 — 5 — 1	
2 — 2 — 0	4 — 6 — 2	8 — 8 — 0
2 — 3 — 1	4 — 7 — 3	8 — 9 — 1
2 — 4 — 2	4 — 8 — 4	
2 — 5 — 3	4 — 9 — 5	9 — 9 — 0
2 — 6 — 4		
2 — 7 — 5	5 — 5 — 0	
2 — 8 — 6	5 — 6 — 1	
2 — 9 — 7	5 — 7 — 2	
	5 — 8 — 3	
	5 — 9 — 4	

13. Wie hat man zu verfahren, wenn man eine Zahl von einer andern abziehen will?

Es gilt hier bei der Subtraction dieselbe Regel wie bei der Addition. Man setze nämlich beide Zahlen so untereinander, daß die Ziffern in gleichen Stellen untereinander zu stehen kommen, nämlich Einer unter Einer, Zehner unter Zehner u. s. f.

14. Warum ist dies nöthig?

Weil nur gleichartige Zahlen von einander subtrahirt werden können (10).

15. Kommt hierbei auf die Stellung der Zahlen etwas an?

Allerdings! Der Minuend muß jedesmal oben, der Subtrahend unten stehen. Z. B. 436 — 127 muß so gesetzt werden:

436 Minuend
127 Subtrahend.

16. Wie hat man nun weiter zu verfahren?

Hat man die Zahlen so gehörig unter einander gesetzt, so ziehe man unter dieselben einen Strich, und verrichte nun die Subtraction, indem man bei den Einern beginnt, die Einer des Subtrahendus von denen des Minuenden wegnimmt, und den Rest, oder das, was vom Minunenden übrig bleibt, unter den Strich, und zwar unter die Einer setzt. Dann gehe man zur nächst folgenden Stelle, nämlich der Zehner; nehme die Zehner des Subtrahenden von denen des Minuenden hinweg, und das, was vom Minuenden übrig bleibt, schreibe man unter den Strich; und zwar unter die Zehner. Auf ähnliche Art verfährt man nun bei allen noch folgenden Ziffern der Zahlen. Z. B. es sey gegeben 873625 — 632213, d. h. man soll von der erstern Zahl die zweite abziehen.

Man schreibt diese Zahlen zuerst richtig unter einander,

873625 Minuendus
632213 Subtrahendus
241412 Rest,

und fängt dann bei den Einer die Subtraction an, indem man sagt: 3 von 5 bleibt 2; man schreibt

die 2 unter den Strich, gerade unter die subtrahirten Ziffern, und geht dann weiter fort: 1 von 2 bleibt 1; 2 von 6 bleibt 4; 2 von 3 bleibt 1; 3 von 7 bleibt 4; 6 von 8 bleibt 2. Man hat so die Zahl 241412 als Rest gefunden, oder als diejenige Zahl, welche anzeigt, um wie viel der Subtrahendus kleiner ist als der Minuendus, oder dieser größer als jener.

17. Kann es aber nicht zuweilen vorkommen, daß eine Ziffer im Subtrahendus eben so groß oder größer ist als die Ziffer im Minuendus, von welcher man sie abziehen soll?

O ja! beides kommt gar oft vor.

18. Wie hat man sich da zu verhalten?

Im erstern Falle, wenn nämlich eine Ziffer im Subtrahendus der Ziffer im Minuendus, von der man sie abziehen soll, gleich ist, daß also, wenn man die erstere von der letztern wegnimmt, gar nichts übrig bleibt: so setzt man unter den Strich, in die gehörige Stelle das Zeichen 0, welche eben anzeigt, daß von der Ziffer im Minuendus, nach Wegnahme der unter ihr stehenden Ziffer des Subtrahendus gar nichts übrig geblieben ist.

19. Ist es durchaus nöthig, daß diese 0 untergeschrieben wird?

Allerdings! Wollte man sie nicht setzen, so würde man einen falschen Rest erhalten. Hätte man z. B. 837 — 631

837
631
26

so bleibt, wenn man die 1 in der ersten Stelle des Subtrahenden von der 7 in der ersten Stelle des Minuenden abzieht, 6. Diese setzt man unter den Strich. Nimmt man die nun folgende Ziffer 3 des Subtrahendus von der über ihr stehenden 3 des Minuenden hinweg, so bleibt nichts übrig. Setzte man nun unter den Strich keine 0, sondern ginge sogleich weiter und zöge 6 von 8 ab und setzte den Rest 2 unten hin, so würde man zum Reste 26 erhalten. Dieser Rest ist aber offenbar falsch. Denn da man keine 0 bei den Zehnern untergesetzt hat, so ist die 2, welche Hunderte bedeuten muß (denn wir haben ja subtrahirt 6, nämlich Hunderte, von 8, nämlich Hunderten, bleibt 2, nämlich Hunderte) und also in die dritte Stelle von der Rechten zur Linken gehört, um eine Stelle niedriger, nämlich in die zweite Stelle gekommen, wo sie natürlich nur Zehner bedeutet. Der Rest ist also offenbar zu klein. Jenes Beispiel müßte richtig so stehen:

837
631
206

Weglassen kann man hingegen diese 0, wenn die Stelle, bei der sie erscheint, die letzte ist, oder wenn nach ihr gegen die Linke keine bedeutenden Ziffern mehr folgen. Man setzt dann gewöhnlich zwei kleine Striche („). Z. B.

197853	3642865
174132	3642152
„23721	„„„„„713

Der Grund, warum man die Stellen in diesen bezeichneten Fällen weglassen kann, liegt in 3, 13.

20. Wie verhält es sich, wenn es vorkommt, daß man eine 0 im Subtrahendus von einer Ziffer oder einer 0 im Minuendus abziehen soll?

Tritt ein solcher Fall ein, so hat er gar nichts Schwieriges; denn wenn man 0 oder Nichts von einer Ziffer abzieht, so bleibt diese Ziffer als Rest übrig; und wenn man 0 von 0, d. h. Nichts von Nichts abzieht, so bleibt natürlich 0 oder Nichts. Z. B.

3604
1500
2104.

Man sagt hier: 0 von 4, d. h. kein Einer von 4 Einern weggenommen, bleiben 4 Einer; ferner: 0 von 0, d. h. kein Zehner von keinem Zehner weggenommen, bleibt kein Zehner oder 0.

21. Hat man durch das bisher beschriebene Verfahren den Subtrahenden wirklich vom Minuenden abgezogen?

Allerdings! Denn wir haben jeden einzelnen Theil des Subtrahendus von jedem einzelnen Theile des Minuenden hinweggenommen, nämlich erst die Einer des Subtrahendus von den Einern des Minuenden; dann die Zehner des Subtrahendus von den Zehnern des Minuenden u. s. f. Wir haben also auch den ganzen Subtrahendus vom ganzen Minuenden weggenommen; denn jeder besteht ja aus seinen einzelnen Theilen, und so den Rest erhalten, welcher anzeigt, um wie viel der Minuendus größer ist als der Subtrahendus.

22. Wie läßt sich dies noch deutlicher zeigen? Wenn man die Minuenden und Subtrahenden in ihre einzelnen Theile, oder Ordnungen zerlegt. Z. B. 9837 ist so viel als 9 Tausende 8 Hund. 3 Zehn. 7 Ein.

5631	=	=	=	5	=	=	6	=	3	=	1 =
4206	Rest:			4 Tausende			2 Hund.		0 Zehn.		6 Ein.

Dieses kann man auch so schreiben:

	9000	+	800	+	30	+	7
	5000	+	600	+	30	+	1
Rest:	4000	+	200	+	0	+	6

oder

4206

23. Wie hat man sich aber zu verhalten, wenn eine Ziffer des Subtrahendus größer ist, als die über ihr stehende, von welcher sie abgezogen werden soll?

Die allgemeine Regel, die man da zu beobachten hat, heißt: wenn eine Ziffer im Minuenden kleiner ist als die Ziffer im Subtrahenden, die von ihr abgezogen werden soll, so daß das Abziehen unmöglich ist, so gehe man im Minuenden in die nächstfolgende Stelle, nehme aus dieser eine Einheit weg, verwandele diese Einheit in Einheiten der nächst niedern Stelle (oder der Stelle, in welcher die zu kleine Ziffer steht), addire diese so erhaltenen Einheiten zu der zu kleinen Ziffer, und ziehe nun die Ziffer des Subtrahendus von dieser Summe ab.

24. Wie läßt sich diese allgemeine Regel durch ein besonderes Beispiel deutlicher machen?

Es sey gegeben:

8. 3 7. 2
1 6 2 3
6 7 4 9

Man fängt hier bei der niedrigsten Stelle, oder den Einern an, und sagt: 3 von 2 kann ich nicht abziehen; denn von etwas Kleinerem kann ich nicht etwas Größeres wegnehmen (z. B. von 2 Thalern kann ich nicht 3 Thaler hinwegnehmen). Da gehe ich nun im Minuendus in die nächst höhere Stelle, welches die Stelle der Zehner ist. Aus dieser Stelle nehme ich eine Einheit, d. h. einen Zehner, denn dieses ist ja die Einheit in dieser Stelle, hinweg; oder, was einerlei ist: ich nehme von den hier stehenden 7 Zehnern einen hinweg und verwandele ihn in Einer, giebt 10 Einer. Diese 10 Einer addire ich zu der in der erstern Stelle vorhandenen Einern (von denen ich die 3 Einer im Subtrahendus nicht abziehen konnte), so daß ich nun 12 Einer erhalte, und ziehe nun die 3 Einer des Subtrahendus von ihnen ab. Natürlich bleiben 9 Einer. Nun gehe ich fort zu den Zehnern und sage: 2 von 6 (denn ursprünglich waren zwar 7 Zehner im Minuenden vorhanden, da ich aber einen davon hinweggenommen habe, welches man gewöhnlich durch einen dabeigesetzten Punkt sich bezeichnet, so bleiben natürlich nur noch 6) bleibt 4. Ich gehe nun zur folgenden Stelle und sage: 6 von 3 kann ich nicht abziehen. Ich gehe also wieder zur nächst höhern Stelle, den Tausenden, nehme aus dieser eine Einheit hinweg,

oder mit andern Worten, ich nehme von den hier sich vorfindenden 8 Tausenden 1 Tausend hinweg, verwandele es in Hunderte und addire diese 10 Hunderte, die ich erhalte, zu den in der dritten Stelle vorhandenen 3 Hunderten, giebt 13 Hunderte und ziehe nun die 6 Hunderte des Subtrahendus davon ab, wo alsdann 7 Hunderte bleiben. Aus der 8 in der vierten Stelle wird nun 7. Nun ziehe ich zuletzt noch die Ziffer 1 des Subtrahendus von dieser 7 ab. Auf diese Art habe ich den richtigen Rest oder Unterschied gefunden.

25. Wenn im Minuenden eine 0 steht und ich soll von ihr eine Ziffer des Subtrahendus abziehen, wird das Verfahren da geändert?

Nein! Man verfährt dann eben so wie vorher. Z. B.

3.06.0
1256
1804

Ich sage: 6 von 0 kann ich nicht wegnehmen; ich gehe also in die nächstfolgende Stelle, die der Zehner; nehme von den hierstehenden 6 Zehnern einen hinweg und verwandele ihn in Einer, giebt 10 Einer. Diese addire ich zu den vorhandenen Einern, d. h. zu keinem Einer, giebt also 10 Einer. Von diesen ziehe ich die 6 Einer des Subtrahendus ab, bleibt 4 Einer. Nun fahre ich fort: 5 von 5 (denn von den 6 Zehnern habe ich einen weggenommen, bleiben also nur 5 noch übrig) bleibt 0; ferner: 2 von 0 kann ich nicht abziehen; ich gehe also in die nächst höhere Stelle, die der

Tausende, nehme von den hier stehenden 3 Tausenden eins hinweg (bleiben also nur noch 2 da stehen); verwandele dieses Tausend in Hunderte, giebt 10 Hunderte, addire diese zu den vorhandenen Hunderten, d. i. keinem Hundert, giebt 10 Hunderte, und ziehe nun die 2 Hunderte des Subtrahendus davon ab; es bleiben 8. Endlich sage ich: 1 von 2 bleibt 1, und ich habe den Unterschied der beiden Zahlen richtig gefunden.

26. Wie nennt man dies, wenn man aus einer höhern Stelle eine Einheit nimmt, um damit die in der vorhergehenden Stelle stehende zu kleine Ziffer zu vermehren, damit man abziehen kann?

Man nennt es borgen, und setzt, wie schon erwähnt, bei die Ziffer, von welcher man borgt, gewöhnlich einen Punkt, um sich zu erinnern, daß man von ihr 1 hinweggenommen hat, und daß sie also um 1 kleiner geworden ist.

27. Wird durch dieses Borgen der Minuend nicht kleiner? Und ist daher das Verfahren nicht falsch?

Der Minuend wird nicht kleiner; denn was ich aus einer Stelle hinwegnehme, nehme ich ja nicht ganz aus dem Minuenden hinweg; sondern ich setze es nur in die nächst niedrigere Stelle. Der Minuend bleibt also in der That ungeändert, und das Verfahren ist daher ganz richtig.

28. Wenn aber nun in der nächst höhern Stelle, aus welcher ich borgen will, eine 0 steht, was fange ich da an?

Wenn dies der Fall ist, und ich also bei der nächst höhern Stelle nicht borgen kann, so gehe ich eine Stelle weiter. Steht auch hier eine 0, so gehe ich noch eine Stelle weiter, und wenn etwa noch mehrere Nullen folgen, so gehe ich so lange fort, bis ich an eine Stelle komme, wo eine Ziffer steht. Von dieser nehme ich eine Einheit hinweg, verwandele sie in Einheiten der nächst niedern Stelle, setze sie in diese Stelle; nehme von diesen zehn Einheiten, wieder eine hinweg (bleiben also nur noch 9), verwandele sie in Einheiten der nächst niedern Stelle, und setze diese zehn Einheiten in diese Stelle. Dann nehme ich von diesen zehn Einheiten wieder eine hinweg u. s. w. Dieses setze ich so lange fort, bis ich zu der Stelle komme, von welcher ich ausging, um zu borgen, das Uebrige wie vorher. Z. B. es ist gegeben:

4000 — 2689.

9 9
(10)(10)10.
4. 0 0 0
2 6 8 9
1 3 1 1

Ich sage: 9 von 0 kann ich nicht abziehen. Ich gehe also in die nächst höhere Stelle, und borge. Aber in dieser Stelle steht ebenfalls eine 0, und ich kann daher hier nichts borgen; ich gehe in die nun folgende höhere Stelle; allein hier steht wieder 0. Endlich finde ich in der jetzt folgenden Stelle, nämlich in der vierten, oder der Stelle der Tausende, eine geltende Ziffer 4, näm-

lich Tausende. Von diesen 4 Tausenden nehme ich eins weg, und verwandele es in Hunderte. Dies giebt 10 Hunderte. Diese 10 Hunderte setze ich über die 0 in der Stelle der Hunderte, nehme von ihnen wieder eins hinweg, so daß nur noch 9 zurückbleiben, und verwandele es in Zehner; dies giebt 10 Zehner. Diese 10 Zehner setze ich über die 0 in der Stelle der Zehner, nehme von ihnen wiederum einen hinweg, so daß nur 9 zurückbleiben; verwandle diesen einen Zehner in Einer, giebt 10 Einer, und setze diese 10 Einer über die 0 in der ersten Stelle. Nun subtrahire ich: 9 von 10 bleibt 1; ferner: 8 von 9 bleibt 1; 6 von 9 bleibt 3; und endlich 2 von 3 bleibt 1; so habe ich die Differenz gefunden.

29. Schreibt man beim wirklichen Rechnen die Zehn allemal über die Nullen?

Nein! Man thut dies nur in Gedanken. Jedoch mögen Anfänger die Beispiele immer so schreiben, wie gezeigt worden.

30. Wie läßt sich beweisen, daß diese Verfahrungsart richtig sey?

Die Richtigkeit geht aus dem vorhergehenden hervor; denn das eine Tausend, welches ich im vorigen Beispiele von den 4 Tausenden wegnahm, habe ich nicht ganz aus dem Minuenden hinweggenommen, sondern ganz auf die niedrigern Stellen vertheilt, so daß ich nun, wo vorher kein Hundert, kein Zehner und kein Einer war, 9 Hunderte, 9 Zehner und 10 Einer erhalten habe, die

so viel sind wie ein Tausend; denn 900 + 90 + 10, giebt genau 1000.

31. Wenn aber der ganze Subtrahendus grösser ist als der Minuend, was ist da zu thun?

In diesem Fall ist es unmöglich zu subtrahiren, da der Minuend die zur Subtraction unumgänglich nöthige Eigenschaft nicht besitzt (8).

32. Was heißt mehrere Zahlen, die zusammengenommen, aber nicht größer seyn dürfen, als eine andere Zahl, von dieser andern abziehen?

Mehrere Zahlen von der angezeigten Beschaffenheit von einer andern Zahl abziehen, heißt entweder, die Summe dieser Zahlen von der andern Zahl abziehen; oder: zuerst die erste Zahl von der andern abziehen; von dem gebliebenen Reste die zweite Zahl, von dem jetzigen Reste die dritte u. s. f., z. B. wenn man die Zahlen 8435, 347, 187, 360 von der Zahl 3.67845 abziehen sollte; so addirt man entweder jene 3 Zahlen, und zieht ihre Summen 196142 ab; nämlich 171703, also:

3.67845
1 96142
1 71703;

oder man ziehe erst die erste Zahl ab, von dem Reste die zweite u. s. f. nämlich:

367845 Minuendus
8435 erste Zahl
359410 erster Rest
347 zweite Zahl
359063 zweiter Rest
187360 dritte Zahl
171703 Rest, wie vorher.

Achtes Kapitel.

Von der Multiplication oder dem Multipliciren (Vervielfältigen).

1. Was heißt Multipliciren?

Nach dem Früheren (5, 6 und 8) heißt multipliciren zu einer Zahl sie selbst noch einmal oder mehreremale setzen. Z. B. wenn ich zu der Zahl 36 noch einmal 36 und noch einmal 36 setze, so habe ich die Zahl 36 vervielfältiget oder multiplicirt.

2. Was heißt Multipliciren also mit andern Worten?

Eine Zahl mehreremale zu sich selbst addiren.

3. Hat man hierzu eine besondere Anweisung nöthig?

Nein! Man bedarf weiter keiner Regeln dazu, als die, welche schon bei der Addition da waren.

4. Ist aber Addition und Multiplication einerlei?

Nein! Denn bei der Addition wird zu einer Zahl noch eine oder mehrere andere Zahlen hinzugesetzt; bei der Multiplication aber wird zu einer Zahl sie selbst ein oder mehrere mal gesetzt.

5. Kann man denn bestimmen, wie vielmal eine Zahl zu sich selbst gesetzt werden soll?

O ja! Man kann sagen: eine Zahl soll 1, 2, 3, 4 u. s. w. 20, 30 u. s. w. u. s. w. mal zu sich selbst gesetzt werden.

6. Wodurch wird angezeigt, wie viel mal eine Zahl zu sich selbst gesetzt werden soll?

Durch eine andere Zahl, und man sagt dann, die zwei Zahlen werden mit einander multiplicirt.

7. Was heißt also zwei Zahlen mit einander multipliciren?

Es heißt demgemäß, die eine Zahl so viel mal zu sich selbst addiren, als die andere Zahl anzeigt, oder als diese andere Zahl Einheiten hat.

8. Und was ist nun Multiplication?

Multiplication ist die Art und Weise, dieses zu bewerkstelligen.

9. Wie viel Zahlen werden also bei der Multiplication erfordert?

Allemal zwei; nämlich eine, welche multiplicirt werden soll, und eine, durch welche multiplicirt werden soll.

10. Haben diese Zahlen eine besondere Benennung?

Ja! Diejenige, welche zu sich selbst gesetzt werden soll, heißt Multiplicandus (die zu vervielfältigende), die andere, welche anzeigt, wie viel mal sie zu sich selbst gesetzt werden soll, Multiplicator (der Vervielfältiger) oder Multiplicans (die vervielfältigende). Diejenige Zahl hingegen, welche heraus kommt, durch die Multiplication dieser beiden, heißt Product.

11. Haben der Multiplicandus und Multiplicator noch andere Namen?

Ja! Jener heißt auch wohl die Grundzahl, dieser die Wiederholungszahl.

12. Welchen Namen führen Multiplicandus und Multiplicator gemeinschaftlich?

Sie heißen zusammen Factoren.

13. Was gebraucht man für Zeichen, um anzudeuten, daß 2 Zahlen mit einander multiplicirt werden sollen?

Man bedient sich dazu entweder des Zeichens × oder eines Punctes (.), diese Zeichen werden so zwischen die Factoren gesetzt, daß der Multiplicandus vorn, der Multiplicator hinten steht; und es wird gelesen „mal." Z. B. 8 × 3 oder 8 . 3 wird gelesen 8 mal 3, und bedeutet, daß die Zahl 8 mit der Zahl 3 multiplicirt werden soll.

14. Bei der Addition und Subtraction konnten nur Einer und Einer, Zehner und Zehner u. s. w. addirt, und Einer von Einern, Zehner von Zehnern u. s. w. subtrahirt werden: findet bei der Multiplication etwas Aehnliches statt, so daß nur Einer mit Einern, Zehner mit Zehnern u. s. w. multiplicirt werden können?

Aus der Natur der Multiplicationen gehet hervor, daß bei ihr eine solche Beschränkung nicht Statt finden könne. Man kann also Einer mit Zehnern und umgekehrt, Zehner mit Hunderten und umgekehrt, Einer mit Hunderten, Tausenden u. s. w. und umgekehrt multipliciren. Denn Zehner mit Einern multipliciren heißt ja nichts anders, als die Zehner so viel mal zu sich addiren, als Einer da sind; ferner Einer mit Zehnern multipliciren heißt ja nichts anders, als die Einer so viel mal zu sich addiren, als in den Zehnern Einer stecken ꝛc.

15. Was hat man aber wohl zu bedenken?

Man hat zu bedenken, daß, wenn Zehner mit

Einern multiplicirt werden, das Product allemal Zehner bedeutet. Denn wenn ich einen oder mehrere Zehner eine bestimmte Anzahl mal zu sich selbst addire, so müssen natürlich wieder Zehner erscheinen. Ferner, wenn Einer mit Zehnern multiplicirt werden, so muß das Product wieder Zehner enthalten. Denn wenn ich Einer oder mehrere Einer zehnmal oder mehrere zehnmale nehme, so erhalte ich, vermöge dessen, was in der Einleitung von der Entstehung der Zahlen und von ihrer Bezeichnungsart gesagt worden ist, 10 oder mehrere 10 mal Einer oder, mit andern Worten, Einer oder mehrere Zehner. Ferner: werden Hunderte mit Einern multiplicirt, so enthält das Product Hunderte; und werden Einer mit Hunderten multiplicirt, so enthält das Product ebenfalls Hunderte, aus ähnlichen Gründen, wie die vorigen waren.

16. Was ist von der Größe des Products in Hinsicht auf den Multiplicandus zu bemerken?

Das Product muß allemal größer seyn, als der Multiplicandus, wenn der Multiplicator größer ist als 1. Denn wenn ich den Multiplicandus mehr als einmal zu sich addire, so muß natürlich das, was heraus kommt, größer als er seyn. Ist hingegen der Multiplicator 1, so ist das Product dem Multiplicandus gleich; denn wenn ich den Multiplicandus nur einmal nehme, so erhalte ich weder eine größere noch kleinere Zahl als er selbst; sondern eine ihm gleiche, oder ihn selbst.

17. Was gilt daher in Hinsicht der Größe des Products für ein Gesetz?

Es kann nie kleiner seyn als der Multiplicandus; sondern muß entweder eben so groß oder größer seyn als dieser.

18. Was ist ferner vom Product zu merken?

Daß es ein Vielfaches vom Multiplicanden ist.

19. Was heißt ein Vielfaches?

Eine Zahl heißt ein Vielfaches von einer andern, wenn diese andere einigemal genommen jener gleich ist; und sie heißt das 1, 2, 3 u. s. w. fache von dieser andern, je nachdem diese andere 1, 2, 3 u. s. w. mal genommen ihr gleich ist. Z. B. 8 ist ein Vielfaches von 2; und zwar das 4fache; denn wenn ich die 2 viermal nehme, so erhalte ich 8; 2 hingegen heißt ein Theil von 8, und zwar der vierte, da sie 4 mal genommen gleich 8 ist.

20. Warum muß das Product allemal ein Vielfaches des Multiplicandus seyn?

Weil der Multiplicandus einigemal, nämlich so viel mal, als der Multiplicator Einheiten hat, genommen, das Product hervorbringt, oder ihm gleich ist.

21. Ein wie vielfaches ist das Product vom Multiplicandus?

Allemal ein so Vielfaches, als der Multiplicator Einheiten hat. Z. B. wenn ich 8 mit 2 multiplicire, so muß das Product ein Zweifaches von 8 seyn. Warum?

Man sieht hieraus, daß der Multiplicand allemal durch die Multiplication vervielfältigt wird. Daher kommt auch der Name Multipliciren (vervielfältigen), gleichsam ein Vielfaches machen.

22. Was hat man nun zu thun, um die Multiplication zweier Zahlen wirklich zu Stande zu bringen, oder sie zu multipliciren?

Das Verfahren ist ganz einfach. Denn der Erklärung der Multiplication zweier Zahlen mit einander gemäß, addirt man die eine, den Multiplicandus, so viele mal zu sich als die andere, der Multiplicator, Einheiten hat. Z. B. wenn gegeben ist 6×4, d. h. wenn man 6 mit 4 multipliciren soll, so hat man weiter nichts zu thun, als den Multiplicandus 6 so viel mal zu sich selbst zu addiren, als der Multiplicator 4 Einer hat, also 4 mal; nämlich:

6
6
6
6
6
24 Product.

Ferner, wenn man hat 124×12, so muß man 124 12 mal zu sich selbst addiren, da der Multiplicator 12, hier 12 Einer, in sich faßt; nämlich:

124
124
124
124
124
124
124
124
124
124
124
124
1488 Product.

23. Muß man dieses, besonders wenn große Zahlen zu multipliciren sind, weitläuftige Verfahren immer anwenden, oder hat man noch ein anderes kürzeres Verfahren?

Eigentlich müßte man immer so verfahren, die Zahlen mögen auch so groß seyn, wie sie wollen. Wäre z. B. der Multiplicandus 3812, der Multiplicator aber 231, so müßte man die Zahl 3812 zweihundert und ein und dreißig mal addiren. Dies würde aber sehr weitläuftig seyn, zumal, wenn der Multiplicator noch größer würde. Um diese ungeheure Weitläuftigkeit zu vermeiden, hat man ein anderes Verfahren entdeckt, das weit kürzer ist.

24. Was für ein Verfahren ist dieses?

Man multiplicirt erst mit einer Ziffer des Multiplicators jede einzelne Ziffer des Multiplicanden; dann mit der zweiten Ziffer des Multiplicators alle Ziffern des Multiplicanden einzeln. Hierauf mit der dritten Ziffer des Multiplicators den Multiplicanden u. s. w., bis keine Ziffer im Multiplicator mehr übrig ist. Man erhält so einzelne Producte, welche zusammen addirt das ganze oder Hauptproduct geben.

25. Wie läßt sich dies durch ein Beispiel verdeutlichen?

Es ist z. B. gegeben 4682 × 368. Statt daß man den Multiplicandus 4682, 368mal addirt; statt dessen multiplicirt man zuerst mit der ersten Ziffer des Multiplicators alle Ziffern des Multiplicanden; dann mit der 2ten Ziffer des Mul-

tiplicators, 6, dann mit der letzten 3, den ganzen Multiplicanden. Damit aber hierdurch das Verfahren wirklich abgekürzt werde, ist es nöthig, die Producte der Einer im voraus zu berechnen, damit man nicht nöthig hat, bei der wirklichen Multiplication jede Ziffer des Multiplicanden so vielmal zu addiren, als die Ziffer des Multiplicators, mit welcher man multiplicirt, Einheiten hat.

26. Wie kann man die Producte der Einer unter sich berechnen?

Diese Berechnung geschieht leicht durch Addition. Das Verfahren ist folgendes:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Man schreibt die Zahlen von 1 bis 9 in eine Reihe; addire hierauf jede zu sich selbst, und setze die Summe unmittelbar darunter, so daß man eine zweite Reihe von Zahlen, nämlich 2, 4, 6 u. s. w. erhält. Man hat auf diese Art jede der 9 Zahlen mit 2 multiplicirt. Denn eine Zahl mit 2 multipliciren heißt ja nichts anders, als diese Zahlen zweimal setzen und addiren. Zu jeder Zahl der zweiten Reihe addire man die gerade über ihr stehende Zahl der ersten Reihe, und schreibe die

Summe unmittelbar darunter. So erhält man eine dritte Reihe von Zahlen, 3, 6, 9 u. s. w. Jede dieser Zahlen ist entstanden, indem man die über ihr stehende in der ersten Reihe zuerst zu sich selbst addirte, und dann noch einmal zu sich addirte. Oder mit andern Worten: jede dieser Zahlen ist das Product, welches man erhält, wenn man die über ihr stehende Zahl in der ersten Reihe mit 3 multiplicirt. Denn eine Zahl mit 3 multipliciren, heißt ja nichts anders, als sie 3 mal setzen und addiren. Zu jeder Zahl der 3ten Reihe addirt man nun ferner die gerade über ihr in der ersten Reihe stehende Zahl, und setzt die Summe gerade darunter, so daß eine 4te Reihe entsteht, welche die Zahlen 4, 8, 12 u. s. w. in sich faßt. Jede dieser in der 4ten Reihe stehende Zahlen ist das Product, das man erhält, wenn man die in der ersten Reihe stehenden Zahlen mit 4 multiplicirt; aus ähnlichen Gründen, wie vorher. Und so fährt man fort, bis man 9 Reihen solcher Zahlen erhält; und es entsteht hierdurch eine Tafel der Producte der Einer unter sich.*)

---

*) Um diese Tafel dem Gedächtnisse einzuprägen, welches nothwendig geschehen muß, kann man sie auflösen und so stellen:

1 mal 1 ist 1	4 mal 1 ist 4	7 mal 1 ist 7
1 — 2 — 2	4 — 2 — 8	7 — 2 — 14
1 — 3 — 3	4 — 3 — 12	7 — 3 — 21
1 — 4 — 4	4 — 4 — 16	7 — 4 — 28
1 — 5 — 5	4 — 5 — 20	7 — 5 — 35
1 — 6 — 6	4 — 6 — 24	7 — 6 — 42
1 — 7 — 7	4 — 7 — 28	7 — 7 — 49
1 — 8 — 8	4 — 8 — 32	7 — 8 — 56
1 — 9 — 9	4 — 9 — 36	7 — 9 — 63
2 — 1 — 2	5 — 1 — 5	8 — 1 — 8
2 — 2 — 4	5 — 2 — 10	8 — 2 — 16
2 — 3 — 6	5 — 3 — 15	8 — 3 — 24
2 — 4 — 8	5 — 4 — 20	8 — 4 — 32
2 — 5 — 10	5 — 5 — 25	8 — 5 — 40
2 — 6 — 12	5 — 6 — 30	8 — 6 — 48
2 — 7 — 14	5 — 7 — 35	8 — 7 — 56
2 — 8 — 16	5 — 8 — 40	8 — 8 — 64
2 — 9 — 18	5 — 9 — 45	8 — 9 — 72
3 — 1 — 3	6 — 1 — 6	9 — 1 — 9
3 — 2 — 6	6 — 2 — 12	9 — 2 — 18
3 — 3 — 9	6 — 3 — 18	9 — 3 — 27
3 — 4 — 12	6 — 4 — 24	9 — 4 — 36
3 — 5 — 15	6 — 5 — 30	9 — 5 — 45
3 — 6 — 18	6 — 6 — 36	9 — 6 — 54
3 — 7 — 21	6 — 7 — 42	9 — 7 — 63
3 — 8 — 24	6 — 8 — 48	9 — 8 — 72
3 — 9 — 27	6 — 9 — 54	9 — 9 — 81

27. Hat diese Tafel einen besondern Namen?

Ja! Sie heißt das Ein-mal Eins. Durch ihre Hülfe kann man nun alle nur mögliche Zahlen leicht und auf eine kürzere Art mit einander multipliciren, als es eben geschah.

28. Wie und wozu wird das Ein mal Eins gebraucht?

Es wird gebraucht, um das Product eines Einers in den andern sogleich ohne Addition zu finden. Soll man z. B. 8 mit 4 multipliciren, so braucht man nur zu sehen, was für eine Zahl in der vierten Reihe des Ein mal Eins unter der Zahl 8 steht. Es steht hier die Zahl 32; diese ist also das Product jener beiden Zahlen. Soll man 7 mit 9 multipliciren, so geht man ins Ein mal Eins und sieht die Zahl in der 9ten Reihe, welche unter die Zahl 7 in der obersten Reihe steht. Es ist 63; diese ist das Product jener beiden Zahlen.

29. Wie können nun durch Hülfe des Ein mal Eins größere Zahlen als Einer multiplicirt werden?

Um die Art und Weise, wie dieses geschieht, besser darthun zu können, müssen wir 2 Fälle unterscheiden. Entweder ist der Multiplicator eine einziffrige, oder eine mehrziffrige Zahl.

1) Wenn der Multiplicator eine einziffrige Zahl, der Multiplicand aber eine mehrziffrige ist. Man setzt dann den Multiplicator gewöhnlich unter den Multiplicandus, und zieht einen Strich. Nun multiplicirt man mit dem Multiplicator alle Ziffern des Multiplicandus von der Rechten zur Linken, und schreibe die ein-

zelnen Producte unter den Strich gehörig unter einander, und addire sie dann, so erhält man das gesuchte Hauptproduct. Z. B.

384 × 4
384 Multiplicandus
4 Multiplicator
16 Product aus 4 × 4 also Einer
32 Product aus 8 × 4 also Zehner
12 Product aus 3 × 4 also Hunderte
1536 Summe dieser einzelnen Producte, also Hauptproduct, oder Product aus 384 × 4.

Man multiplicirt bei diesem Beispiele mit dem Multiplicator 4, zuerst die Ziffer in der ersten Stelle des Multiplicandus; nämlich 4, durch das Ein mal Eins, und setzt das Product 16 unter den Strich. Es bedeutet Einer, da man Einer mit Einern multiplicirt hat (15). Dann multiplicirt man mit dem Multiplicator die 2te Ziffer des Multiplicanden, 8, ebenfalls nach der Tafel des Ein mal Eins. Man erhält 32, dieses sind aber Zehner, weil ich Zehner mit Einern multiplicirt habe (15). Man darf also diese 32 nicht gerade unter das vorige Product, 16, setzen, so daß die Ziffer 2 unter die Ziffer 6 zu stehen käme. Denn die 6 bedeutet Einer, die 2 aber Zehner, und man könnte alsdann nicht addiren. Die Ziffer 2 der Zahl 32 muß vielmehr unter die Ziffer 1 des vorigen Products 6 zu stehen kommen; denn diese 1 bedeutet, da sie in der 2ten Stelle steht, Zehner. Nun multiplicire man endlich mit dem Mul-

tiplicator 4, die letzte Ziffer des Multiplicanden, nämlich 3. Im Ein mal Eins findet man das Product, nämlich 12. Diese 12 bedeutet Hunderte, weil Hunderte mit Einern multiplicirt worden sind (15). Man muß also beim Untersetzen dieses Products unter den Strich, unter das vorige Product, die erste Ziffer 2 unter die letzte Ziffer 3, des vorigen Products setzen, da diese 3 auch Hunderte bedeutet. Nun zieht man abermal einen Strich und addirt diese so untereinander stehenden einzelnen Producte; und man erhält so das ganze Product aus den Zahlen 384 und 4.

Eben so verhält es sich mit folgendem Beispiele:

684 13 × 3

68413

3

9

3

12

24

18

205239

30. Läßt sich dieses Verfahren nicht noch abkürzen?

Ja, und zwar auf folgende Weise:

Wenn man mit dem Multiplicator die erste Ziffer des Multiplicandus multiplicirt hat, und es liegen in dem Producte, welcher Einer bedeutet, Zehner, so nimmt man diese Zehner heraus und schreibt blos die etwa bleibenden Einer unter den Strich (wenn gar kein Einer dann übrig bleibt, so

kommt 0 hinunter, welche ja nicht weggelassen werden darf). Die herausgenommenen Zehner zählt man zu dem folgenden Producte, nämlich zum Producte des Multiplicators in die zweite Ziffer des Multiplicanden. Liegen in diesem Producte, welches ja Zehner bedeutet, Hunderte, so nimmt man sie ebenfalls heraus, und schreibt blos die Zehner neben die schon unten stehenden Einer; die Hunderte aber zählt man zum folgenden Producte, nämlich zum Producte des Multiplicators in die dritte Ziffer, oder die Hunderte des Multiplicandus. Auf ähnliche Art fährt man fort, bis keine Ziffer im Multiplicanden mehr zu multipliciren übrig ist. Bei der letzten Ziffer schreibt man natürlich das Product ganz unter.

Daß man auf diese Art dasselbe Product erhalte, wie durch das vorherige weitläuftigere Verfahren, ist klar. Denn statt, daß dort die Zehner, Hundert u. s. f. der einzelnen Producte mit unter den Strich geschrieben und dann addirt wurden: statt dessen sind bei dem jetzigen Verfahren jene Zehner, Hunderte u. s. f. gleich in Gedanken addirt worden. Das erstere von den vorhin aufgeführten Beispielen auf diese Art berechnet, wird das Ganze deutlicher machen.

384
4
1536

Ich fange an: 4 multiplicirt mit 4 giebt nach dem Ein mal Eins zum Product 16, nämlich Einer (nach 15). In diesen 16 Einern liegt 1 Zeh-

ner und 6 Einer. Ich schreibe blos die 6 Einer unter den Strich. Den Zehner behalte ich, wie man zu sagen pflegt, im Sinn. Nun gehe ich weiter, und sage: die zweite Ziffer des Multiplicandus, 8, multiplicirt mit dem Multiplicator 4, giebt 32 zum Product. Diese 32 sind Zehner. Zu ihnen addire ich den im Sinn behaltenen Zehner, giebt also 33 Zehner. Da aber allemal 10 Zehner einen Hunderter ausmachen, so liegen in diesen 33 Zehnern 3 Hunderte und 3 Zehner. Ich schreibe also nur die 3 Zehner unter den Strich, neben die schon unten stehenden 6 Einer; die 3 Hunderte behalte ich wieder im Sinn. Nun schreibe ich zur letzten Ziffer des Multiplicanden, die in der 3ten Stelle steht, und sage: 3 multiplicirt mit dem Multiplicator 4, giebt 12, nämlich Hunderte, und die drei im Sinn behaltenen Hunderte dazu addirt, giebt 15 Hunderte (oder 1 Tausend 5 Hundert); diese 15 schreibe ich, da im Multiplicanden keine Ziffer mehr folgt, ganz unter den Strich, neben die schon unten stehenden Ziffern.

31. Wie läßt es sich zeigen, daß man durch das bisher beschriebene Verfahren wirklich das Product der beiden Factoren erhält?

Die Richtigkeit des Verfahrens läßt sich leicht auf folgende Art darthun: vermöge der Erklärung von der Multiplication zweier Zahlen, heißt die Zahl 384 mit 4 multipliciren nichts anders, als sie 4 mal setzen und addiren. Es ist nun einerlei, ob ich die ganze Zahl 4 mal setze und addire, oder ob ich ihre einzelnen Theile, die Einer, Zehner,

Hunderte 4 mal setze und addire, und dann diese erhaltenen Summen nochmals durch die Addition verbinde. Denn in beiden Fällen kommt ein und dasselbe heraus, wie folgendes darthut:

384 ist, wenn man sie in ihre Theile auflöst, so viel als 300, 80, 4
384 = = = 300, 80, 4
384 = = = 300, 80, 4
384 = = = 300, 80, 4
1536 1200, 320, 16

d. i.

wenn man diese Theilproducte addirt 1536.

Dasselbe ist im Vorigen geschehen.

32. Wie verfährt man, wenn der Multiplicator eben so wie der Multiplicandus eine mehrziffrige Zahl ist?

II) Wenn dieser zweite Fall statt findet, daß nämlich der Multiplicator auch aus mehrern Ziffern besteht, so verfahre man, wie folgt:

Man multiplicire mit jeder Ziffer des Multiplicators alle Ziffern des Multiplicanden der Reihe nach, nach dem vorigen, schreibe die einzelnen Producte unter den Strich gehörig unter einander, so nämlich, daß Einer unter Einer, Zehner unter Zehner, Hunderte unter Hundert u. s. f. zu stehen kommen, und addire sie dann.

33. Wie läßt sich dies durch ein Beispiel verdeutlichen?

Es sey gegeben: 83142 × 263. Man schreibe die Zahlen unter einander:

83142 Multiplicand
263 Multiplicator

249426
498852
166284
} einzelne Producte der einzelnen Ziffern des Multiplicators in dem ganzen Multiplicanden.

21866346

Man multiplicire nun mit der ersten Ziffer des Multiplicators, 3, alle Ziffern des Multiplicanden, oder den ganzen Multiplicanden, so wie es im vorhergehenden gezeigt worden. Das Product, 249426, setze man unter den Strich. Nun multiplicire man mit der folgenden zweiten Ziffer des Multiplicators, 6, den Multiplicanden. Das erhaltene Product, 498852, schreibt man unter das erste, doch so, daß von diesem die erste Ziffer Rechts, oder die Einer, unten frei bleibt. Die Ursache ist diese. Die zweite Ziffer des Multiplicators, 6, mit der wir jetzt multiplicirt haben, bedeutet Zehner, da sie in der zweiten Stelle von der Rechten zur Linken steht. Man hat also den Multiplicandus jetzt eigentlich mit 6 Zehnern oder mit 60 multiplicirt, und die Ziffer 2 des Products 498852 bedeutet also Zehner. Deswegen darf man sie nicht unter die erste Ziffer des vorigen Products, nämlich unter 6, welche ja nur Einer bedeutet, sondern unter die zweite Ziffer, 2, setzen, die Zehner anzeigt. Endlich multiplicire man mit der letzten Ziffer des Multiplicators, 2, den ganzen Multiplicandus, das Product 166284 schreibe man unter das vorige Product, doch so, daß die erste Ziffer desselben rechts unten frei bleibt. Die Ur-

sache ist eine ähnliche wie vorher. Indem ich nämlich den Multiplicandus mit der letzten Ziffer des Multiplicators, 2, multiplicire, so habe ich ihn eigentlich mit 2 Hunderten (200) multiplicirt. Denn die 2 stand ja in der dritten Stelle und galt also Hunderte. Dies Product 166284 bedeutet also auch Hunderte, oder, was einerlei ist, die erste Ziffer rechts dieses Products, nämlich 4, bedeutet Hunderte, und ich darf sie also nicht unter die erste Ziffer des vorigen Products setzen, da diese nur Zehner bezeichnet, sondern unter die zweite Ziffer desselben, nämlich 5. Zuletzt werden nun natürlich die so gefundenen und so untergeschriebenen einzelnen Producte durch Addition zu einem Ganzen vereinigt.

34. Wie läßt sich dieses Verfahren anders darstellen:

Man kann es auch folgendermaßen darstellen:

83142
263
249426
498852
166284
21866346

Man multiplicire zuerst den Multiplicandus mit der ersten Ziffer des Multiplicators, 3, wie (30) gelehrt worden, nämlich: 2 mal 3 ist 6; 4 mal 3 ist 12; ich schreibe 2 unter und behalte 1 im Sinn; 1 mal 3 ist 3 und 1 ist 4 u. s. f. Nun multiplicire ich den Multiplicandus mit der zweiten Ziffer des Multiplicators, 6, auf eben die Art; ich sage nämlich: 2 mal 6 ist 12; dies sind

aber Zehner; denn ich habe Einer mit Zehnern multiplicirt (15). In diesen 12 Zehnern liegt 1 Hunderter; ich schreibe also nur die 2 Zehner unter den Strich unter das vorige Product, natürlich aber rücke ich eine Stelle weiter nach der Linken zu, damit die 2 unter die 2 im vorigen Product zu stehen komme, weil diese auch Zehner bedeutet. Nun multiplicire ich die andern Ziffern des Multiplicandus mit 6 fort. Ist dieses geschehen, so multiplicire ich den Multiplicanden mit der letzten Ziffer des Multiplicators, 2, und sage: 2mal 2 ist 4; dies sind aber Hunderte (nach 15). Ich muß diese 4 also so unter das vorige Product schreiben, daß sie unter die Hunderte desselben zu stehen kommt, d. h. ich muß die 2, die erste Ziffer des vorigen Products unten frei lassen, und eine Stelle nach der Linken zu einrücken. Die 4 kommt also unter die zweite Ziffer, 5, des vorigen Products zu stehen. Nun multiplicire ich bis zu Ende, und addire dann die einzelnen Producte.

35. Wie läßt sich die Richtigkeit dieses Verfahrens nachweisen?

Daß dieses Verfahren richtig sey, erhellet leicht. Denn, um das vorige Beispiel zu behalten, 83142 × 263 heißt ja weiter nichts, als die Zahl 83142 zweihundert und drei und sechzig mal nehmen. Nun habe ich aber nach der vorigen Verfahrungsart den Multiplicandus 83142 zuerst 3mal genommen, indem ich ihn mit 3 multiplicirte; dann 60 mal, indem ich mit der zweiten Ziffer des Multiplicators, 6, welche Zehner bedeutete,

multiplicirte; und zulezt habe ich ihn 200 mal genommen, indem ich ihn mit der letzten Ziffer des Multiplicators, 2, die Hunderte anzeigte, multiplicirte. Ich habe also den ganzen Multiplicanden in Allem 200 mal, 60 mal und 3 mal oder 263 mal genommen und addirt, oder ihn richtig mit 263 multiplicirt.

36. Leidet dieses, so wie das frühere Verfahren Abänderungen, wenn in den Factoren Nullen vorkommen?

Eigentliche Abänderungen werden dadurch nicht hervorgebracht, doch kann man sich mancherlei Vortheile verschaffen, wenn dergleichen Nullen in den Factoren vorkommen, und die Rechnung oft verkürzen.

37. Wie kann man verfahren, wenn im Multiplicanden Nullen vorkommen?

Man kann hier 2 Fälle unterscheiden. Entweder steht eine Null oder mehrere Nullen zwischen 2 Ziffern, oder es stehen eine oder mehrere Nullen zwischen 2 Ziffern, oder es stehen eine oder mehrere Nullen rechts am Ende.

I) Im ersten Falle verfährt man ganz wie bisher gezeigt worden, d. h. man multiplicirt auch diese Nullen durch den Multiplicator, oder seine einzelnen Ziffern. Da aber 0, d. h. Nichts, durch irgend eine Zahl multiplicirt natürlich wieder Nichts, d. h. 0 giebt (denn 0 mit einer Zahl multipliciren, heißt ja nichts anders, als 0 so viel mal setzen und addiren, als diese Zahl Einheiten hat. Ich mag aber 0 so viel mal zu sich addiren als ich will, so kommt immer 0); so setze ich in das Product, wenn keine

Einheiten aus dem vorigen Producte im Sinn behalten worden sind. (Habe ich aber etwas im Sinn behalten, so kommt es ins Product zu stehen.) Diese 0 muß ich aber ja hinsetzen; denn wenn ich sie wegließe, so würde das Product zu klein werden, da die auf die 0 noch folgenden Ziffern nach der Linken, um eine Stelle niedriger zu stehen kämen, als sie eigentlich stehen müssen, und dadurch zehnmal kleiner würden. Z. B.

406003
2
812006

Dieses heißt: 2 mal 3 ist 6; 2 mal 0 ist 0; 2 mal 0 ist 0; 2 mal 6 ist 12; ich schreibe 2 hin und behalte 1 im Sinn; 2 mal 0 ist 0 und 1 ist 1; 2 mal 4 ist 8. Wollte ich die 2 Nullen zwischen den Ziffern 2 und 6 weglassen, so würde ein falsches Product, nämlich 8126 erscheinen. Daß dieses Product falsch ist, erhellet daraus, daß es kleiner ist als der Multiplicandus (16).

II) Wenn die Nullen rechts am Ende des Multiplicanden stehen, so multiplicire ich mit dem Multiplicator nur die geltenden Ziffern des Multiplicanden mit Weglassung der Nullen. An das so gefundene Product hänge ich aber diese Nullen wieder an. Z. B.

682000
24
2728000
1364000
16368000

682000 × 24
682|000
24
2728
1364
16368000

Die Richtigkeit dieses Verfahrens, welches die Rechnung oft sehr erleichtert, erhellt aus Folgendem:

Durch die Weglassung der 3 Nullen ist jede Ziffer des Multiplicandus um 1000 verringert worden. Denn die erste geltende Ziffer des Multiplicandus, 2, steht ursprünglich in der 4ten Stelle, und bedeutet also Tausende. Durch Weglassung der Nullen ist sie aber in die erste Stelle gekommen, wo sie nur Einer bedeutet. Sie ist also 1000 mal kleiner geworden. Eben so verhält es sich mit den folgenden Ziffern 8 und 6. Das Product, welches man auf diese Art aus den 3 Ziffern des Multiplicanden, 682, und dem Multiplicator 24 erhält, nämlich 16368, ist also nicht das richtige Product aus 682000 × 24; sondern es ist 1000 mal kleiner, als es seyn müßte. Dadurch aber, daß man diesem Producte die vorher weggelassenen 3 Nullen wieder anhängt, wird jede Ziffer desselben, also auch das ganze Product, wieder 1000 mal größer, oder so, wie es seyn muß. Denn nun kommt die erste Ziffer des Products, 8, die vor Wiederanhängung der Nullen in der ersten Stelle stand, und also Einer bedeutete, in die 4te, wo sie Tausende bedeutet. Sie ist also 1000 mal größer geworden. Dasselbe gilt von allen übrigen Ziffern des Products.

Man kann sich auch von der Richtigkeit des Verfahrens durch die Erfahrung leicht überzeugen, wenn man nämlich jenes Beispiel auf die gewöhnliche Art, ohne die Nullen wegzulassen, rechnet.

Es wird das Nämliche heraus kommen, wie man oben ersehen kann.

38. Was ist zu merken, wenn im Multiplicator sich Nullen vorfinden?

Man kann hier wieder 2 Fälle unterscheiden. Entweder finden sich ein oder mehrere Nullen zwischen 2 Ziffern, oder sie stehen am Ende des Multiplicators.

1) Kommen im Multiplicator zwischen 2 Ziffern Nullen vor, so übergehe man sie bei der Multiplication ganz, d. h. man multiplicire mit ihnen den Multiplicandus gar nicht, rücke aber das Product der folgenden Ziffer des Multiplicators mit dem Multiplicanden um so viele Stellen weiter nach der Linken zu, so viele Nullen man übergangen hat. Z. B.

3642157	3642157
600403	600403
10926471	10926471
0000000	14568628
14568628	21852942
0000000	2186761989271
0000000	
21852942	
2186761989271	

Warum man dieses thut, sieht man leicht. Die Rechnung wird dadurch sehr abgekürzt. Denn wollte man mit den Nullen multipliciren, so würde man nichts weiter als Reihen von Nullen erhalten, die auf das Product weiter keinen Einfluß haben. Denn eine Zahl mit 0 multiplicirt, oder

mit andern Worten, eine Zahl 0 mal, d. h. gar nicht genommen, giebt natürlich Nichts, 0. Warum das Einrücken nöthig sey, erhellet daraus, daß Zehner, Hunderte, Tausende u. s. w. multiplicirt mit Einern, Zehner, Hunderte, Tausende u. s. w. giebt; und daß man die einzelnen Producte so untereinander schreiben muß, daß man sie addiren kann. Das obige Beispiel, daneben auf die gewöhnliche Art berechnet, wird es anschaulich machen.

II) Stehen die Nullen am Ende des Multiplicators, so multiplicire man den Multiplicandus nur mit den geltenden Ziffern, mit Weglassung der Nullen. Aber an das so erhaltene Product müssen sie wieder angehängt werden. Z. B.

836 × 24000

836	836
24000	24|000
000	3344
000	1672
000	20064000
3344	
1672	
20064000	

Daß dieses Verfahren die Rechnung oft sehr erleichtert, leuchtet ein. Die Richtigkeit desselben geht aus dem Vorigen (37) hervor.

Eben so: 56 × 1000 — 56 × 10

56	56
1|000	1|0
56000	560

D. h. in solchen Fällen also, wo der Multiplicator eine 1 mit angehängten Nullen ist, hängt man diese Nullen geradezu an den Multiplicanden.

39. Wenn sowohl im Multiplicandus als Multiplicator am Ende Nullen sind: wie verfährt man da?

Man multiplicirt dann nur, mit Weglassung der Nullen in beiden, die geltenden Ziffern mit einander, hängt aber dem so erhaltenen Producte so viele Nullen an, als man in beiden Factoren weggelassen hat. Z. B.

8300 × 4000

83|00
4|000

33200000

Die Richtigkeit dieses Verfahrens ergiebt sich aus dem Vorhergehenden.

40. Nach den vorhergehenden Anweisungen wurde immer bei der Ziffer des Multiplicandus, die in der ersten Stelle rechts steht, oder mit den Einern zu multipliciren angefangen: ist dieses immer nothwendig?

Es ist darum nothwendig, damit man die Einheiten höherer Stellen, die man durch die Multiplication des Multiplicators mit der Ziffer einer niedrigern Stelle erhalten hat, gleich mit zu dem folgenden Producte nehmen und die Rechnung also bedeutend abkürzen kann.

41. Wir haben ferner im Vorigen jedesmal zuerst mit der niedrigsten Ziffer des Multiplicators, den Einern, den Multiplicanden multiplicirt, und

dann sind wir nach und nach zu den folgenden Ziffern in den höheren Stellen gegangen: ist dieses auch durchaus nothwendig?

Nein! Man könnte eben so gut umgekehrt verfahren, d. h. man könnte zuerst mit der höchsten Ziffer*) des Multiplicators den Multiplicanden multipliciren und dann nach und nach zu den folgenden niedrigern Ziffern fortgehen. Nur muß man die einzelnen Producte richtig unterschreiben, d. h. so, daß immer die Ziffern, die in gleiche Stellen gehören, unter einander zu stehen kommen, nämlich Einer unter Einer, Zehner unter Zehner, damit man alsdann diese einzelnen Producte addiren kann. Z. B.

25438
643
152628
101752
76314
16356634

Statt daß man mit der Ziffer 3 des Multiplicators den Multiplicanden zuerst multiplicirt, fängt man mit der höchsten Ziffer desselben, nämlich 6, die Multiplication an, indem man sagt: 6 mal 8 ist 48, nämlich Hunderte, ich schreibe 8

*) Man merke auf den Unterschied zwischen höchster und größter Ziffer. Jenes ist die Ziffer, die in der höchsten Stelle steht; dieses diejenige, welche abgesehen von der Stelle, in welcher sie steht, die mehrsten Einheiten in sich faßt. Z. B. in der Zahl 23941 ist 2 die höchste, 9 aber die größte Ziffer.

unter und behalte 4 im Sinn; 6 mal 3 ist 18 und 4 ist 22; ich schreibe 2 unter und behalte 2 im Sinn u. s. w. Ist man hiermit fertig, so geht man zur nächst niedrigern Ziffer im Multiplicandus, nämlich 4, und multiplicirt mit ihr den Multiplicanden, indem man sagt: 4 mal 8 ist 32, nämlich Zehner (warum?); die 3 Hunderte, die in diesen 32 Zehnern liegen, behalte ich im Sinn, und schreibe blos die 2 Zehner unter das vorige Product, aber eine Stelle weiter gegen die Rechte. Die Ursache, warum man um eine Stelle vorrückt, ist eine ähnliche wie die des Einrückens (33 und 34). Nun multiplicirt man endlich mit der niedrigsten Ziffer des Multiplicators, nämlich 3, den Multiplicanden, indem man sagt: 3 mal 8 ist 24, nämlich Einer, hierin liegen 2 Zehner, die ich im Sinn behalte; die noch übrigen 4 Einer aber schreibe ich unter das vorige Product, aber eine Stelle weiter gegen die Rechte. Zuletzt werden die so untergeschriebenen Producte addirt, so erhält man das Hauptproduct.

42. Wir haben bis jetzt durch Hülfe des Ein mal Eins alle nur mögliche Zahlen mit einander multipliciren gelernt: es fragt sich, ob man auch ohne das Ein mal Eins Zahlen mit einander multipliciren kann?

Ja, es giebt auch noch eine andere Art Zahlen mit einander zu multipliciren, bei der man das Ein mal Eins ganz entbehren kann. Jedoch läßt sie sich nur in gewissen Fällen mit mehr

Vortheil anwenden, als die gewöhnliche. Sie besteht in Folgendem:

Man mache sich durch Hülfe der Addition auf ähnliche Art wie bei der Verfertigung der Ein mal Eins = Tabelle, die Vielfachen des Multiplicandus bis zum Neunfachen. Aus dieser Tabelle der Vielfachen nehme man nun die einzelnen Producte, wie sie die Ziffern des Multiplicators verlangen. Z. B.

Tafel der Vielfachen 3684 × 9482679

1)	3684	3684
2)	7368	9482679
3)	11052	33156
4)	14736	25788
5)	18420	22104
6)	22104	7368
7)	25788	29472
8)	29472	14736
9)	33156	33156
		34934189436

Man setzt zuerst den Multiplicanden hin, so ist dies das Einfache, welches man durch eine an die Seite gesetzte 1 bezeichnet; dieses Einfache addirt man zu sich selbst, so erhält man das Zweifache. Man setzt es unter das Einfache, und daneben eine 2, damit man es als Zweifaches sogleich erkennen kann. Dieses Zweifache addirt man wieder zum Einfachen, so erhält man das Dreifache. Man setzt es unter das Zweifache, und daneben eine 3, um es als Dreifaches zu erkennen. Dieses Dreifache addirt man aufs Neue zum Einfachen, so kommt das Vierfache; man setzt es unter das

Dreifache, und darneben eine 4. Und so fährt man fort bis zum Neunfachen. Auf diese Art erhält man eine Tafel der Vielfachen des Multiplicandus; und nun besteht die ganze Multiplication in einem bloßen Abschreiben. Nämlich: die erste Ziffer des Multiplicators in unserm Beispiele ist 9. Der Multiplicandus ist also mit 9 zu multiplicieren, oder mit andern Worten, es ist das Neunfache des Multiplicanden zu nehmen. Dieses findet man aber schon in der Tafel der Vielfachen des Multiplicandus, neben der Ziffer 9. Man nimmt es also hier heraus und schreibt es unter den Strich. Die zweite Ziffer des Multiplicators ist 7, nämlich Zehner. Man soll damit den Multiplicandus multipliciren, oder das 7 Zehnerfache (70fache) desselben nehmen. Man geht in die Tabelle der Vielfachen zur Seitenziffer 7, nimmt das dabeistehende 7fache des Multiplicanden, und setzt es unter das vorige Product. Da aber eigentlich das Product Zehner bedeuten muß, so rückt man dieses 7fache des Multiplicanden eine Stelle weiter nach der Linken, damit es auch Zehner werden, nämlich so, daß seine erste Ziffer 8, unter die zweite Ziffer des ersten Products, nämlich 5, zu stehen komme. Bei der dritten Ziffer 6, des Multiplicators geht man abermals in die Tabelle, sucht die Seitenziffer 6, nimmt das dabeistehende 6fache des Multiplicanden und schreibt es unter das vorhergehende Product. Da aber die 6 des Multiplicators in der dritten Stelle steht, und also Hunderte bedeutet, so muß das Product ebenfalls Hun-

derte bedeuten, und man muß daher das aus der Tafel genommene 6fache eine Stelle weiter gegen die Linke, als das vorhergehende Product stand, nämlich so, daß die erste Ziffer desselben unter die zweite des vorigen Products zu stehen komme. Auf ähnliche Art fährt man bis zu Ende fort. Zuletzt addirt man diese einzelnen Producte, so erhält man das Hauptproduct.

Es ist nicht allemal nöthig, die Vielfachen des Multiplicanden bis zum 9fachen in der Tabelle zu entwerfen; sondern nur so weit, als es wegen der größten Ziffer des Multiplicators nöthig ist. Z. B. bei 843×6421 braucht man die Vielfachen des Multiplicanden nur bis zum 6fachen zu suchen, weil man ein mehrfaches als das 6fache nicht braucht, da im Multiplicator die größte Ziffer 6 ist. Z. B.

1) 843	843
2) 1686	6421
3) 2529	843
4) 3372	1686
5) 4215	3372
6) 5058	5058
	5412903

43. Erhält man durch dieses Verfahren das richtige Product auch, wie durch das früher angegebene?

Man erhält es eben so richtig. Denn man hat nur die einzelnen Producte der einzelnen Ziffern des Multiplicators in den Multiplicandus vorher berechnet, und dann nur gehörig untergeschrieben.

44. Können die beiden Factoren mit einan-

der verwechselt werden, d. h. kann man den Multiplicandus zum Multiplicator und diesen zu jenen machen, ohne daß das Product geändert wird?

Ja, man kann sie verwechseln, z. B. wenn 4 mit 3 multiplicirt werden soll, so kann man auch die Zahl 3 zum Multiplicanden und die Zahl 4 zum Multiplicator machen, oder 3 mit 4 multipliciren, und es wird immer ein und dasselbe Product erscheinen; nämlich in beiden Fällen 12. Man drückt dies gewöhnlich so aus $3 \times 4 \times 3$ ist gleich (=) 3×4.

45. Wie läßt sich dies darthun?

Wir wollen einmal die Einheiten im Multiplicanden 4 durch Puncte anzeigen, und die Einheiten im Multiplicator 3 ebenfalls; so erhält man das Product, wenn man die 4 Einheiten des Multiplicandus jede 3mal unter einander setzt, wie hier geschehen ist.

Multiplicand	Multiplicator
. . . .	.
. . . .	.
. . . .	.

Jede Einheit des Multiplicanden giebt eine Reihe, die so viel Einheiten hat als der Multiplicator; und jede Einheit des Multiplicator giebt eine Reihe, die so viel Einheiten hat als der Multiplicand; d. h. der Multiplicator steckt auch im Product so viel mal, als der Multiplicandus Einheiten hat, und man kann also die Factoren verwechseln, ohne daß das Product geändert wird.

46. Kann eine solche Verwechselung nützlich werden?

O ja! Man kann durch sie sich oft eine kleine

Erleichterung verschaffen, wenn der Multiplicator größer ist als der Multiplicand. Z. B. wenn gegeben ist 468 × 39246, so müßte man eigentlich die Multiplication so verrichten:

468
39246
2808
1872
936
4212
1404
18367128

Verwechselt man aber die Factoren, d. h. sieht man den Multiplicator 39246 als Multiplicanden, und den Multiplicanden 468 als Multiplicator an, so wird die Rechnung etwas leichter; denn dann steht das Exempel so:

39246
468
313968
235476
156984
18367128

Noch einleuchtender wird dieser Nutzen, wenn der gegebene Multiplicand nur Eine Ziffer hat, der Multiplicator aber mehrere; z. B. 9 × 36842, dies müßte eigentlich so stehen:

9
36842
18
36
72
54
27
331578

Verwechselt man die Factoren aber, so steht es so:

36842
9
331578

47. In dem Bisherigen ist immer vom Multipliciren zweier Zahlen gesprochen worden: kann es nicht auch vorkommen, daß mehr als 2 Zahlen mit einander multiplicirt werden sollen?

O ja! Es kommt zuweilen vor, daß 3, 4 und mehrere Zahlen mit einander multiplicirt werden sollen. Es wird dies so ausgedrückt: $3 \times 6 \times 9$ d. h. 3 mal 6 mal 9. Eben so $12 \times 130 \times 9 \times 46$.

48. Was heißt das, mehr als zwei Zahlen mit einander multipliciren?

3, 4 und mehrere Zahlen mit einander multipliciren, heißt: die erste mit der zweiten, dieses Product mit der dritten, das jetzige Product mit der 4ten Zahl u. s. w. multipliciren. Z. B. es wäre gegeben:

$$386 \times 9 \times 16 \times 8$$

Dies heißt: die erste Zahl, 386 soll mit der zweiten 9 multiplicirt werden. Das erhaltene Pro-

duct soll wieder mit der 3ten 16, und das jetzige Product endlich noch mit 8 multiplicirt werden, nämlich so:

386 erste Zahl
9 zweite Zahl
3474 Product der beiden ersten
16 dritte Zahl
20844
3474
55584 Product der 3 ersten
8 vierte Zahl
444672 Product aller 4 Zahlen.

Auf die Ordnung, in welcher man die gegebenen Zahlen (Factoren) multiplicirt, kommt nichts an. Man kann erst die erste mit der letzten, dann das Product mit der zweiten und endlich mit der dritten multipliciren, oder wie man selbst will. Das Hauptproduct bleibt ungeändert.

Neuntes Kapitel.

Vom Dividiren oder der Division.

1. Was heißt Dividiren?

Dividiren heißt nach dem Vorigen von einer Zahl eine andere so viel mal wegnehmen, als es möglich ist. Die Art, wie dieses geschieht, heißt Division.

2. Was heißt eine Zahl von einer andern mehreremale wegnehmen?

Es heißt, diese Zahl erst einmal wegnehmen

von dem, was übrig bleibt, noch einmal u. s. f., so lange man sie wegnehmen kann.

3. Wie viel Zahlen werden also bei der Division erfordert?

Jedesmal 2; nämlich eine, von welcher subtrahirt, und eine, welche subtrahirt werden soll.

4. Haben die beiden zur Division erforderlichen Zahlen besondere Namen?

Ja! Diejenige Zahl, von welcher eine andere so viel mal weggenommen werden soll, als es möglich ist, heißt Dividendus (die zu dividirende); diejenige aber, die von ihr weggenommen werden soll, heißt Divisor (die dividirende). Diejenige Zahl aber, welche anzeigt, wie viel mal der Divisor von dem Dividenden subtrahirt werden kann, heißt der Quotient. Z. B. 8 soll durch 2 dividirt werden, heißt: die 2 soll von der 8 so viel mal hinweggenommen werden, als es möglich ist. Dies kann 4 mal geschehen, nämlich:

8
2 1 mal
6
2 2 mal
4
2 3 mal
2
2 4 mal
0

8 ist der Dividendus, 2 der Divisor und 4 der Quotient.

5. Was für Zeichen hat man, um anzuzeigen, daß 2 Zahlen dividirt werden sollen?

Man hat zwei Zeichen. Entweder setzt man zwei Puncte (:) zwischen die Zahlen, und zwar so, daß der Dividendus zuerst steht und der Divisor zuletzt; oder man braucht einen horizontalen Strich (—), um die Division anzuzeigen; und zwar wird der Dividendus über den Strich, der Divisor aber unter denselben gesetzt. Diese Zeichen werden gelesen „dividirt durch." Z. B. 8 : 4, oder $\frac{8}{4}$ heißt: die Zahl 8 soll durch die Zahl 4 dividirt werden. 8 ist der Divendus, 4 der Divisor.

6. Worauf kommt es bei der Division an?

Es läuft Alles darauf hinaus, ausfindig zu machen, wie viel mal eine Zahl von einer andern abgezogen werden kann.

7. Auf welche Art kann man dies finden?

Durch wiederholte Subtraction. Man subtrahirt den Divisor vom Dividenden so viele mal, als es gestehen kann, und zählt dies nun, so erhält man den Quotienten.

8. Was zeigt also der Quotient an?

Wie viel mal eine Zahl von einer andern weggenommen werden kann.

9. Wie kann man noch sagen?

Der Quotient zeigt an, wie viel mal der Divisor im Dividenden enthalten ist. Z. B. wenn 4 der Quotient, 8 der Dividendus und 2 der Divisor; so zeigt der Quotient 4 an, daß der Divisor 2 in dem Dividenden 8, 4 mal enthalten ist. Denn wenn ich den Divisor 2 4 mal vom Dividenden 8 wegnehmen kann; so muß er auch in der 8 viers

mal liegen, sonst könnte ich ihn ja nicht so vielmal wegnehmen.

10. Was kann man demgemäß noch für eine Erklärung der Division geben?

Man kann diesem nach auch wohl sagen: Dividiren heißt eine Zahl, den Quotienten, finden, welche anzeigt, wie viel mal der Divisor in dem Dividenden liegt.

11. Hat man keine andern Hülfsmittel, eine Zahl durch eine andere zu dividiren, als daß man wiederholte Subtraction anwendet?

Allerdings! Man bedient sich eines andern, weit kürzern Verfahrens. Denn das durch wiederholte Subtraction würde in den meisten Fällen zu weitläuftig seyn. Wollte man z. B. 48 durch 4 dividiren, so müßte man, obgleich diese Zahlen noch klein sind, die 4 doch 12 mal von 48 abziehen, wie man sich davon leicht überzeugen kann, wenn man die Subtraction wirklich verrichtet. Wird der Dividendus größer, so wird auch das Verfahren weitläuftiger, wenn der Divisor klein ist. Z. B. wenn gegeben wäre 2760 : 12, so müßte man den Divisor 12 nicht weniger, als 230 mal vom Dividenden abziehen; denn so viel mal liegt er in demselben. Wer Lust hat, kann durch wirkliche Subtraction sich davon überzeugen. Um diese Weitläuftigkeiten zu vermeiden, bedient man sich eines andern Verfahrens, um eine Zahl durch eine andere zu dividiren.

12. Welches ist dieses Verfahren?

Das Verfahren ist, wenn der Divisor eine

einziffrige Zahl ist, folgendes: man dividirt nicht den ganzen Dividendus auf einmal, sondern seine einzelnen Theile nach und nach; oder mit andern Worten: man dividirt mit dem Divisor nach und nach alle Ziffern des Dividenden.

13. Wie läßt sich dies durch ein Beispiel anschaulich machen?

Es sey gegeben 84 : 4. Statt daß man den Divisor 4 so vielmal vom Dividenden 84 abzieht; als es geschehen kann, und auf diese Art den Quotienten findet, welcher oben anzeigt, wie vielmal sich jene Subtraction bewerkstelligen lasse: statt dessen dividirt man mit dem Divisor zuerst die erste Ziffer zur Linken, nämlich 8, des Dividendus und dann die zweite vier. Folgendes wird es noch deutlicher machen.

84 : 4

Man dividirt zuerst die Ziffer 8 des Dividenden mit dem Divisor 4, d. h. man subtrahirt den Divisor 4 von der Ziffer 8 so vielmal es geht; hier 2 mal, nämlich:

```
 8        4
 4   21   4
---      ---
 4        0
 4
---
 0
```

Der Quotient ist also 2; ich schreibe ihn hin, und dividire nun die zweite Ziffer des Dividenden, nämlich 4, durch den Divisor 4, d. h. ich ziehe den Divisor 4 von der zweiten Ziffer des Dividenden so viel mal ab, als es möglich ist. Dies

wird hier 1 mal geschehen können. 1 ist also der Quotient. Diese 1 schreibe ich neben den vorhingefundenen Quotienten 2, aber gegen die Rechte, damit sie in die erste Stelle, die Ziffer 2 aber in die zweite Stelle komme. Dies ist darum nothwendig, weil die erste Ziffer des Dividenden, 8, ebenfalls in der 2ten Stelle stand. Die zweite Ziffer des Dividenden, 4, von welche der zweite Quotient 1 herkommt, in der ersten Stelle. Auf diese Art hat man den Quotienten 21 gefunden. Daß dieses der richtige Quotient ist, davon kann man sich leicht überzeugen, wenn man den Divisor 4 vom Dividenden 84 so vielmal abziehen will, als es möglich ist. Man wird finden, daß dies überhaupt 21 mal möglich ist.

14. Da diese Verfahrungsart, zumal wenn der Dividendus eine größere Zahl ist, doch immer noch etwas zu weitläuftig ist: wie kann man dieselbe noch verkürzen?

Man kann auf folgende Art die Arbeit kürzer machen. Man berechnet nämlich in Voraus, wie vielmal jeder Einer in dem andern enthalten ist; oder mit andern Worten: man berechnet die Quotienten aus den Einern in einander.

15. Wie kann man diese Quotienten berechnen?

Man setzt zuerst die Ziffer 1, und zieht sie von allen Einern 1, 2, 3 u. s. f. nach und nach ab, so vielmal es möglich ist; und bemerkt den Quotienten, d. h. diejenige Zahl, welche anzeigt, wie viel mal sich die 1 von jedem Einer subtrahiren lasse. Nämlich:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
(1) 1/0	1) 1/1	1) 1/2	1) 1/3	1) 1/4	1) 1/5	1) 1/6	1) 1/7	1) 1/8
	(2) 1/0	2) 1/1	2) 1/2	2) 1/3	2) 1/4	2) 1/5	2) 1/6	2) 1/7
		(3) 1/0	3) 1/1	3) 1/2	3) 1/3	3) 1/4	3) 1/5	3) 1/6
			(4) 1/0	4) 1/1	4) 1/2	4) 1/3	4) 1/4	4) 1/5
				(5) 1/0	5) 1/1	5) 1/2	5) 1/3	5) 1/4
					(6) 1/0	6) 1/1	6) 1/2	6) 1/3
						(7) 1/0	7) 1/1	7) 1/2
							(8) 1/0	8) 1/1
								(9) 1/0

Die daneben ſtehenden letzten, auf beiden Seiten eingeklammerten Ziffern zeigen den Quotienten an; oder zeigen an, wie viel mal 1 von jedem Einer abgezogen werden könne; oder mit andern Worten: wie viel mal 1 in jedem Einer enthalten iſt. Ordnet man dieſes gehörig, ſo entſteht folgende Tabelle:

Mit 1 dividirt in 1 giebt zum Quotienten 1
= 1 = = 2 = = = = 2
= 1 = = 3 = = = = 3
= 1 = = 4 = = = = 4
= 1 = = 5 = = = = 5
= 1 = = 6 = = = = 6
= 1 = = 7 = = = = 7
= 1 = = 8 = = = = 8
= 1 = = 9 = = = = 9

Nun gehe man weiter, und nimmt die Ziffer 2, und unterſucht, wie viel mal ſie von jedem Einer ſubtrahirt werden kann, oder wie viel mal ſie in jedem Einer liegt. Von der 1 kann man ſie natürlich nicht ſubtrahiren.

2	3	4	5	6	7	8	9
(1) $\frac{2}{0}$	1) $\frac{2}{1}$	1) $\frac{2}{2}$	1) $\frac{2}{3}$	1) $\frac{2}{4}$	1) $\frac{2}{5}$	1) $\frac{2}{6}$	1) $\frac{2}{7}$
		(2) $\frac{2}{0}$	2) $\frac{2}{1}$	2) $\frac{2}{2}$	2) $\frac{2}{3}$	2) $\frac{2}{4}$	2) $\frac{2}{5}$
				(3) $\frac{2}{0}$	3) $\frac{2}{1}$	3) $\frac{2}{2}$	3) $\frac{2}{3}$
						(4) $\frac{2}{0}$	4) $\frac{2}{1}$

Die neben den Reihen eingeklammerten Ziffern sind die Quotienten. Jedoch ist die Subtraction nicht bei allen aufgegangen, sondern es ist bei einigen ein Rest geblieben. Z. B. bei 3. Die 2 ist von der 3 einmal subtrahirt; allein es ist noch der Rest 1 geblieben; d. h. 2 könnte mehr als 1 mal aber weniger als 2 mal von 3 subtrahirt werden. — Nun schreibe man die Quotienten mit Uebergehung derer, wo noch ein Rest geblieben ist, ordentlich wie vorher, nämlich so:

Mit 2 dividirt in 2 giebt zum Quotienten 1
= 2 = = 4 = = = = 2
= 2 = = 6 = = = = 3
= 2 = = 8 = = = = 4

Fährt man so fort, die Ziffern 3, 4 ꝛc. von den Einern, und auch von den Zehnern zu subtrahiren, so erhält man folgende Tabelle, welche das Ein in Ein genannt wird, und die man sich recht geläufig machen muß, ehe man weiter geht:

Ein in Ein.

1 liegt in 1 — 1 mal	4 liegt in 4 — 1 mal	7 liegt in 7 — 1 mal
1 — 2 — 2 =	4 — 8 — 2 =	7 — 14 — 2 =
1 — 3 — 3 =	4 — 12 — 3 =	7 — 21 — 3 =
1 — 4 — 4 =	4 — 16 — 4 =	7 — 28 — 4 =
1 — 5 — 5 =	4 — 20 — 5 =	7 — 35 — 5 =
1 — 6 — 6 =	4 — 24 — 6 =	7 — 42 — 6 =
1 — 7 — 7 =	4 — 28 — 7 =	7 — 49 — 7 =
1 — 8 — 8 =	4 — 32 — 8 =	7 — 56 — 8 =
1 — 9 — 9 =	4 — 36 — 9 =	7 — 63 — 9 =
2 — 2 — 1 =	5 — 5 — 1 =	8 — 8 — 1 =
2 — 4 — 2 =	5 — 10 — 2 =	8 — 16 — 2 =
2 — 6 — 3 =	5 — 15 — 3 =	8 — 24 — 3 =
2 — 8 — 4 =	5 — 20 — 4 =	8 — 32 — 4 =
2 — 10 — 5 =	5 — 25 — 5 =	8 — 40 — 5 =
2 — 12 — 6 =	5 — 30 — 6 =	8 — 48 — 6 =
2 — 14 — 7 =	5 — 35 — 7 =	8 — 56 — 7 =
2 — 16 — 8 =	5 — 40 — 8 =	8 — 64 — 8 =
2 — 18 — 9 =	5 — 45 — 9 =	8 — 72 — 9 =
3 — 3 — 1 =	6 — 6 — 1 =	9 — 9 — 1 =
3 — 6 — 2 =	6 — 12 — 2 =	9 — 18 — 2 =
3 — 9 — 3 =	6 — 18 — 3 =	9 — 27 — 3 =
3 — 12 — 4 =	6 — 24 — 4 =	9 — 36 — 4 =
3 — 15 — 5 =	6 — 30 — 5 =	9 — 45 — 5 =
3 — 18 — 6 =	6 — 36 — 6 =	9 — 54 — 6 =
3 — 21 — 7 =	6 — 42 — 7 =	9 — 63 — 7 =
3 — 24 — 8 =	6 — 48 — 8 =	9 — 72 — 8 =
3 — 27 — 9 =	6 — 54 — 9 =	9 — 81 — 9 =

16. Wie ist diese Tabelle zu gebrauchen?

Wenn z. B. Einer durch Einer zu dividiren sind, so kann man den Quotienten unmittelbar finden, indem man den Divisor in der ersten Reihe, den Dividenden aber in der zweiten aufsucht; die in der dritten Reihe hinter dem Divisor und Dividenden stehende Zahl ist der gesuchte Quotient. Z. B. wenn 8 durch 2 dividirt werden soll, so suche man den Divisor 2 in der ersten Reihe auf; dann den Dividenden 8 in der zweiten; so wird man dahinter in der dritten Reihe den Quotienten 4 finden.

17. Wie wird nun durch Hülfe des Ein in Ein eine mehrziffrige Zahl durch eine einziffrige dividirt?

Dies geschieht nun auf folgende Art, die gleich an einem Beispiele deutlich gemacht werden soll. Es sey gegeben 48316 : 2

Divisor	Dividendus	Quotient
2	48316	20000
	40000	4000
	„8316	100
	8000	50
	316	8
	200	24158
	116	
	100	
	16	
	16	
	0	

Man dividirt mit dem Divisor 2 zuerst in die erste Ziffer links des Dividendus, nämlich 4; d. h. man untersucht vermöge des Ein in Ein, wie viel mal der Divisor 2 in der ersten Ziffer des Dividenden, 4, enthalten ist. Den Quotienten 2 setzt man hinter den Strich, und hängt ihm so viele Nullen an, als noch Ziffern im Dividendus übrig sind, hier 4. Nun multiplicire man den Quotienten 20000 mit dem Divisor 2, giebt 40000. Dieses Product subtrahire man von dem Dividendus. Es bleibt als Rest 8316. Mit diesem Reste verfahre man gerade so, wie vorher, d. h. man untersuche, wie viel mal der Divisor 2 in der höchsten Ziffer des Restes enthalten ist. Er ist in 8 4 mal enthalten. Diesen Quotienten 4 setze ich hinter den Strich, und hänge ihm so viele Nullen an, als noch Ziffern übrig sind, hier 3. Diesen Quotienten 4000 multiplicire man nun mit dem Divisor 2, giebt 8000, und ziehe dieses Product von dem vorhin gebliebenen Reste ab, bleibt als Rest 316. Mit diesem Reste wird nun ganz auf gleiche Weise verfahren, und so geht es fort, bis man nicht mehr dividiren kann. — Die so gefundenen Quotienten werden dann addirt, so giebt dies den Hauptquotienten, welcher anzeigt, wie viel mal der Divisor 2, im Dividenden 48316 enthalten ist. Der Hauptquotient heißt 24158.

18. Wie verfahre ich, wenn die höchste Ziffer des Dividenden kleiner ist als der Divisor?

Ist dies der Fall, so untersuche ich zuerst, wie viel mal der Divisor in den 2 höchsten Zif-

fern enthalten ist, und verfahre dann übrigens ganz wie vorher. Z. B. 26295 : 3

3	26295	8000
	24000	700
	12295	60
	2100	5
	1195	8765
	180	
	„15	
	15	
	7	

Da der Divisor 3 in der höchsten Ziffer des Dividendus nicht ein einziges mal enthalten ist, so untersuche ich, wie viel mal er in den beiden höchsten Ziffern, 26, enthalten ist. Er ist 8 mal darin enthalten; diese 8 wird hinter den Strich geschrieben u. s. w.

19. Wie läßt sich die Richtigkeit dieses Verfahrens darthun?

Die Richtigkeit desselben geht aus Folgendem hervor, wobei das vorletzte Beispiel zum Grunde gelegt werden soll. Wir untersuchten zuerst, wie viel mal der Divisor 2 in der höchsten Ziffer des Dividenden lag. Wir fanden durch das Ein in Ein 2 als Quotienten, und setzten diese 2 hinter den Strich. Da aber die höchste Ziffer des Dividenden, in welche dividirt wurde, in der 5ten Stelle von der Rechten zur Linken stand, also Zehntausende bedeutete, so konnte die 2 nicht blos 2 einzelne mal in ihr enthalten seyn, sondern 2 Zehntausendmal (20000); oder die 2 mußte Zehntau-

sende bedeuten. Wir hingen ihr deswegen so viele Nullen an, als noch Ziffern im Dividenden übrig waren, nämlich 4; damit sie, wie die höchste Ziffer des Dividenden, in die 5te Stelle von der Rechten gegen die Linke zu stehen kam, wo sie nun Zehntausende bedeutete. Sodann multiplicirten wir diesen Quotienten 20000 mit dem Divisor, und erhielten 80000. Diese 80000 zogen wir von dem Dividenden ab, und hatten also den Divisor auf einmal 20000 mal vom Dividenden weggenommen, oder gesehn, daß er 20000 mal im Dividenden lag. Den Rest 8316 behandelten wir auf eben dieselbe Art, um zu sehen, wie viel mal der Divisor in ihm lag u. s. f. Die einzelnen Quotienten addirten wir endlich, so mußte natürlich der Hauptquotient erscheinen. Denn wir hatten nach und nach gesehen, daß der Divisor 2 im Dividenden 20000 mal, 4000 mal, 100000 mal, 50 mal und 80 mal enthalten sey, also zusammen 24158 mal.

20. Läßt sich das bisher beschriebene Verfahren noch abkürzen, und auf welche Art?

Es läßt sich allerdings noch abkürzen, und zwar auf folgende Art:

Man untersuche, wie viel mal der Divisor 2 in der höchsten Ziffer des Dividendus 4, enthalten ist. Die Zahl, welche dies anzeigt, oder den Quotienten schreibe man hinter den Strich, multiplicire den Divisor damit und zieht dieses Product 4 von der höchsten Ziffer ab; 4 von 4 bleibt 0 oder die Subtraction geht auf. Nun ziehe ich die

nächst niedrigere Ziffer des Dividenden, 8, herunter und dividire mit dem Divisor in dieselbe. Den Quotienten 4 schreibe ich hinter den Strich, rechts neben den vorigen Quotienten, multiplicire mit ihm den Divisor, und ziehe das Product 8 von der heruntergezogenen Ziffer 8 ab; es bleibt nichts. Nun ziehe ich die folgende niedrigere Ziffer des Dividenden, nämlich 3 herunter, dividire sie mit dem Divisor, schreibe den Quotienten hinter den Strich rechts, neben den vorigen, multiplicire mit ihm den Divisor, und ziehe das Product 2 von der herunter gegangenen Ziffer 3 des Dividendus ab, bleibt 1 als Rest. Zu diesem Reste ziehe ich nun die im Dividendus nächst folgende niedrigere Ziffer 1 herunter, dividire mit dem Divisor in die so durch den vorhingebliebenen Rest 1 und durch die heruntergezogene Ziffer 1 des Dividenden entstandene Zahl 11, schreibe den Quotienten 5 hinter den Strich rechts neben den vorigen Quotienten, multiplicire den Divisor damit, und ziehe das Product von der Zahl 11 ab; es bleibt eins als Rest. Zu diesem Reste ziehe ich nun endlich die letzte Ziffer des Dividenden 6 herunter, dividire mit dem Divisor in die so entstandene Zahl 16, schreibe den Quotienten 8 hinter den Strich rechts neben den vorigen Quotienten, multiplicire mit ihm den Divisor und ziehe das Product 16 von jener Zahl 16 ab; es bleibt 0, und die Division ist geendigt, da im Dividendus keine Ziffer mehr übrig ist. Der Quotient heißt 24158.

Divisor	Dividendus	Quotient
2	48316	24158
	4	
	„8	
	8	
	„3	
	2	
	11	
	10	
	„16	
	16	
	„	

21. Ist dieses abgekürzte Verfahren eben so richtig, als das vorige weitläuftigere?

Es ist eben so richtig, weil es mit jenem ganz einerlei ist. Denn es ist hier nur das in Gedanken verrichtet worden, was dort wirklich ausgeführt wurde.

22. Wie verhält es sich bei diesem abgekürzten Verfahren, wenn eine Ziffer des Dividendus, die herunter gezogen wird, kleiner ist als der Divisor?

Dieser Fall, daß nämlich eine heruntergezogene Zahl kleiner ist als der Divisor, kommt oft vor, und man verfährt dabei auf folgende Art: man sagt nämlich, der Divisor ist in dieser Zahl kein einziges mal oder kein ganzes mal enthalten, und setzt hinter den Strich in die gehörige Stelle ein 0; dann wird ohne weiteres (denn 0 mit dem Divisor dividirt giebt 0) die nächst folgende Ziffer im Dividendus heruntergesetzt und mit dem Divisor in die

nun entstandene Zahl dividirt u. s. w. Folgendes Beispiel, wenn man es gehörig ansieht, wird das Gesagte klar machen.

5 | 52545 | 10509
5
„25
25
„„45
45
„„

23. Muß denn die Division immer aufgehen?

Nein, sie geht nicht immer auf; oft bleibt bei der letzten Subtraction noch ein Rest übrig. Z. B.

4 | 6831 | $1707\frac{3}{4}$
4
28
28
„„31
28
3

Hier bleibt zuletzt 3 als Rest, d. h. der Quotient 1707 ist ein wenig zu klein; oder: der Divisor 4 läßt sich aus dem Dividendus 6831, 1707 mal wegnehmen; aber da bleiben vom Dividenden noch 3 übrig; oder: der Divisor ist 4 in dem Dividenden 6831 nicht nur 1707 mal enthalten; sondern man braucht nicht einmal den ganzen Dividenden, sondern er könnte um 3 kleiner seyn. Man hängt in einem solchen Falle den Rest an den

Quotienten, und zeigt durch das Zeichen der Division (wozu man hier den horizontalen Strich wählt) an, daß er eigentlich noch durch den Divisor dividirt werden sollte, wenn dies möglich wäre.

24. Wie verfährt man, wenn der Divisor eine mehrziffrige Zahl ist?

Man verfährt eigentlich wie bei dem vorigen Falle, wenn der Divisor eine einziffrige Zahl ist; nur daß man sich hier vorher, ehe man an die Division geht, die Vielfachen des Divisors vom 1fachen bis zum 9fachen durch Addition sucht und hinschreibt. Z. B. 1461394 : 362.

Vielfache des Divisors

1) 362
2) 724
3) 1086
4) 1448
5) 1810
6) 2172
7) 2534
8) 2896
9) 3258

362 | 1461394 | 4037
1448
„ „ 1339
1086
„ 2534
2534
„ „ „ „

Hat man die Vielfachen des Divisors so gefunden, so vergleicht man den Divisor 362 mit den 3 höchsten Ziffern des Dividendus 146, oder wenn diese kleiner als der Divisor sind, wie hier, mit den 4 ersten, mit 1461, und sucht in der Tafel der Vielfachen diese Zahl auf. Findet man sie, so setzt man die links neben ihr stehende Ziffer, welche anzeigt, das Wievielfache diese Zahl ist, hin-

ter den Strich, an die Stelle des Quotienten, und zieht das Vielfache von den 4 ersten Ziffern des Dividendus ab. Findet man jene Zahl nicht genau unter den Vielfachen des Divisors, so sucht man dasjenige Vielfache, welches ihr am nächsten kommt, hier das 4fache, zieht dieses von jenen 4 ersten Ziffern des Dividendus, nämlich 1461 ab, und schreibt die Zahl 4, welche anzeigt, daß man das 4fache des Divisors genommen und abgezogen hat, hinter den Strich in die Stelle des Quotienten. Man ziehe nun zu dem bei der Subtraction gebliebenen Reste 13 die folgende Ziffer des Dividenden, 3, herunter. Da aber die hierdurch entstandene Zahl 133 kleiner ist, als der Divisor, so setzt man hinter den Strich in die Stelle des Quotienten neben die Ziffer 4, 0, und zieht zu der Zahl 133 sogleich die folgende Ziffer des Dividenden, 9, herunter. Die so entstandene Zahl 1339 sucht man unter den Vielfachen des Divisors, und da man sie unter denselben nicht genau findet, so nimmt man dasjenige Vielfache, welches ihr am nächsten kommt, hier das 3fache, und zieht es von ihr ab; die Ziffer 3 aber, welche anzeigt, daß man das 3fache des Divisors abgezogen habe, setzt man hinter den Strich in die Stelle des Quotienten, rechts neben die 0. Zu dem gebliebenen Reste 253 zieht man nun die folgende letzte Ziffer des Dividendus, nämlich 4, herunter. Die so entstandene Zahl 2534 sucht man unter den Vielfachen des Divisors. Man findet diese Zahl auch wirklich genau; sie kommt nämlich mit dem 7fachen des Divisors überein.

Man zieht dieses 7fache von jener Zahl ab; die Ziffer 7 aber schreibt man hinter den Strich in die Stelle des Quotienten neben die Ziffer 3, so erhält man den gesuchten Quotienten, nämlich 4073. Nach der letzten Subtraction bleibt kein Rest, und die Division geht also auf, und der Divisor 362 liegt im Dividenden 1461394 genau 4037 mal.

25. Ist dieses Verfahren richtig?

Ja, es ist vollkommen richtig; denn es gründet sich eben darauf, worauf sich das Verfahren beim ersten Falle gründete, wenn nämlich der Divisor eine einziffrige Zahl war.

26. Läßt sich, wenn der Divisor auch eine mehrziffrige Zahl ist, die Division nicht auch ohne die Tafel der Vielfachen zu Stande zu bringen?

O ja! Man sucht dann die einzelnen Ziffern des Quotienten herauszubringen, indem man sich folgender Muthmaßung bedient: vielleicht wird der ganze Divisor in den ersten Ziffern des Dividenden eben so oft stecken, als die höchste Ziffer des erstern in der höchsten Ziffer des letztern. Diese Muthmaßung trügt zwar bisweilen; allein diesen Irrthum kann man gar leicht verbessern, sobald man die gefundene Ziffer des Quotienten mit dem Divisor multiplicirt, und dieses Product von dem dividirten Theile des Dividendus abzieht. Denn ist dieses Product größer, als die dividirten Ziffern des Dividendus, so ist die erste Ziffer des Quotienten zu groß angenommen, und man muß eine kleinere nehmen; ist aber nach geschehener Subtraction dieses Products von den dividirten Ziffern

der Ueberrest größer, als der Divisor, so ist die erste Ziffer des Quotienten zu klein, und man muß eine größere nehmen. Die ganze Division geschieht übrigens ganz wie vorher; man zieht nämlich zu dem gebliebenen Reste die folgende Ziffer des Dividenden herunter u. s. w.

27. Wie läßt sich dies durch ein Beispiel anschaulicher machen?

Es sey z. B. gegeben 233550 : 54; so steht die Division auf folgende Art:

54 | 233550 | 4325
216
„175
162
„135
108
„270
270
„„„„

Da hier eine oder zwei Ziffern des Dividenden zu klein sind, als daß man sie durch den Divisor 54 dividiren könnte, so nimmt man gleich die 3 ersten Ziffern, 233, auf einmal, und urtheilt also: vielleicht ist der ganze Divisor 54 in diesen 3 ersten Ziffern des Dividendus so oft enthalten, als die erste Ziffer 5 des erstern in den zwei ersten Ziffern 23 des letztern. Nun steckt 5 in 23 ungefähr 4 mal; man setzt also 4 in die Stelle des Quotienten, multiplicirt mit dieser Zahl den Divisor und zieht das Product 216 von 233 ab. Weil dieses Product kleiner als 233 und der Rest,

17, der nach der Subtraction bleibt, kleiner ist, als der Divisor 54, so ist 4 die erste Ziffer des Quotienten. Zu dem Reste 17 setzt man die folgende Ziffer des Dividenden, nämlich 5; und fährt auf eben die Art mit der Division so lange fort, bis im Dividenden keine Ziffer mehr übrig ist. Daß diese Art, die Division zu verrichten, richtig sey, erhellet aus dem Vorigen.

28. Was ist zu bemerken, wenn am Ende des Divisors oder des Dividenden, oder an beiden zugleich Nullen vorkommen?

Kommen am Divisor Nullen vor, so ist nichts besonderes zu bemerken. Die Division wird verrichtet, wie es im Vorigen gelehrt wurde. Eben so ist es, wenn am Ende des Dividenden Nullen vorkommen. Nur muß man sich in diesem letztern Falle in Acht nehmen, daß man sie nicht übergeht. Folgendes Beispiel wird es lehren:

4	8000	2000
	8	
	,,000	

Man sagt: 4 in 8 habe ich 2 mal. Die 2 wird in die Stelle des Quotienten geschrieben, mit ihr der Divisor multiplicirt, und das Product 8 von 8 abgezogen; es bleibt nichts. Nun ziehe ich die auf die 8 im Dividenden folgende 0 herunter, und sage, 4 in 0 habe ich 0 mal. Ich schreibe die 0 neben die vorige Ziffer des Quotienten. Nun wird die folgende 0 des Dividenden heruntergezogen, und ich sage wieder: 4 in 0 habe ich 0 mal. Ich schreibe also wieder 0 in die Stelle des Quotienten, neben die vorige 0. Nun wird die letzte 0 des Dividenden herunter gezogen, und ich sage

wieder: 4 in 0 habe ich 0 mal; es kommt also noch eine 0 in den Quotienten, und er heißt nun 2000. — Man beachte noch folgendes Beispiel:

```
31 | 835000 | 26935
   62  |||
  ----|||
   215|||
   186|||
  ----|||
  „290|||
   279|||
  ----|||
  „110|||
    93|||
  ----|||
   170
   155
  ----
  „15 Rest.
```

Kommen im Divisor und Dividenden am Ende Nullen vor, so kann man bei beiden gleich viele Nullen wegstreichen, und nur das Uebrige dividiren. Z. B. 18000 : 300

```
3ØØ | 18ØØØ | 60        300 | 18000 | 60
 18                      1800
 ,,,0                    ,,,,,,0
```

Die Richtigkeit dieses Wegstreichens geht aus dem danebenstehenden vollständig gerechneten Beispiele hervor. Zuweilen kann man sich hierdurch die Division gar sehr erleichtern. Wenn der Divisor aus einer 1 mit angehängten Nullen besteht, und der Dividendus eben so viel Nullen am Ende hat, so braucht man weiter nichts zu thun, als die Nullen des Dividendus gegen die Nullen des Divisors wegzustreichen; was vom Dividendus dann noch übrig bleibt, ist der Quotient. Z. B. 867000 : 1000.

1ØØØ | 867ØØØ | 867 Quotient 1000 | 867000 | 867

8000

„6700

6000

„7000

7000

Ø

29. Warum fängt man bei der Division allemal bei den höchsten Stellen des Dividendus an?

Dies geschieht darum, damit man die etwa bleibenden Reste einer höhern Stelle sogleich zu der Ziffer der nächst niedrigern Stelle nehmen kann. Man würde offenbar, wenn man bei den niedrigsten Stellen des Dividendus die Division anfangen wollte, oft mehr als Einen Rest erhalten, und sich die Rechnung dann weitläuftiger machen.

30. Wie verfährt man, wenn der Divisor größer ist als der Dividendus?

In einem solchen Falle kann man, vermöge der Erklärung der Division, dieselbe gar nicht verrichten. Man zeigt sie dann nur durch die Zeichen der Division an; z. B. 9 : 13 oder gewöhnlicher $\frac{9}{13}$.

31. Was kann man durch die Division finden?

Man kann durch die Division auch einen beliebigen Theil von einer Zahl finden; oder: wenn man eine Zahl in eine gewisse Anzahl gleicher Theile theilen will, so braucht man sie nur durch eine Zahl zu dividiren, die so groß ist, als die Anzahl der Theile, in die man sie theilen will.

Wollte man z. B. eine Zahl in 8 gleiche Theile theilen, so muß man sie durch 8 dividiren. Der Quotient zeigt alsdann, wie groß der 8te Theil ist.

32. Wie kann man diesem nach die Division noch erklären?

Man kann diesem gemäß auch sagen: Dividiren heißt eine Zahl, den Dividendus, in so viele gleiche Theile theilen, als eine andere Zahl, der Divisor, Einheiten hat. Z. B.: für 20 dividirt durch 5 kann man auch sagen: die 20 soll in 5 gleiche Theile getheilt werden. Es ist aber ganz einerlei, wie man die Division ansieht, ob als ein Enthaltenseyn einer Zahl in einer andern, oder als ein Eintheilen einer Zahl in so viel gleiche Theile, als eine andere Zahl Einheiten hat. Das Verfahren, wie man den Quotienten findet, bleibt bei beiden Ansichten ungeändert.

Zehntes Kapitel.

Von den Proben.

1. Was heißt Probe?

Unter Probe versteht man überhaupt eine Prüfung, ob etwas richtig sey oder nicht; und auf die Rechnungsarten angewendet heißt Probe eine Prüfung, ob man richtig gerechnet hat oder nicht.

2. Sind dergleichen Proben nützlich?

Ja, sie können oft großen Nutzen haben. Man kann nämlich durch ihre Hülfe sogleich entdecken, ob man beim Rechnen einen Fehler gemacht hat,

ohne daß man erst einen Erfahrnern zu fragen braucht.

3. Hat man für alle Rechnungsarten Proben?

Allerdings! Man hat eine Probe der Addition, Subtraction, Multiplication und Division.

4. Welches ist die Probe der Addition?

Man hat verschiedene Proben der Addition ausgedacht. Aber von allen sind nur 2 des Bemerkens werth; die übrigen sind meistentheils fehlerhaft.

5. Welches ist die erste Probe der Addition?

Die erste von diesen Proben ist die durch die Subtraction. Wenn man ein Additionsexempel gerechnet hat, so addirt man es noch einmal, läßt jedoch die oberste Zahl (oder eine andere beliebige) weg. Zieht man diese so gefundene Summe von der Hauptsumme ab, so muß, wenn man richtig gerechnet hat, die weggelassene Zahl übrig bleiben; z. B.

730852		
66109	66109	828377
31074	31014	97525
342	342	730852
828377	97525	

Die Summe dieser 4 Zahlen ist 828377. Um nun zu prüfen, ob dies richtig ist, addirt man noch einmal, läßt aber die oberste Zahl weg. Die jetzt gefundene Summe 97525 zieht man von der Hauptsumme ab, so muß die weggelassene Zahl übrig bleiben, welches hier auch der Fall ist, ein Zeichen, das richtig addirt worden war.

6. Woraus geht die Richtigkeit dieser Probe hervor?

Daß diese Probe richtig sey, geht aus Folgendem hervor: in der Summe 828377 müssen alle Zahlen, die addirt worden sind, liegen; denn diese Summe entstand ja, indem wir die gegebenen Zahlen zusammenzählten. Nimmt man nun aus der Summe 3 von den addirten Zahlen wieder hinweg, so muß natürlich die 4te übrig bleiben.

7. Kann diese Probe der Addition durch die Subtraction nicht noch auf eine andere Art gemacht werden?

Allerdings kann man diese Probe der Addition durch die Subtraction auch noch auf eine andere Art machen, welcher darin besteht, daß man von der gefundenen Summe erst die erste Zahl, von dem bleibenden Reste, die zweite Zahl, und so nach und nach alle addirte Zahlen abzieht. Wenn man die letzte addirte Zahl abgezogen hat, so muß die Subtraction aufgehen. Z. B. wenn wir das vorhergehende Exempel nehmen; so war die Summe der 4 gegebenen Zahlen 828377. Zieht man von dieser Summe die erste addirte Zahl, von dem gebliebenen Reste die zweite, von dem nunmehrigen Reste die dritte, und von dem jetzigen Reste die vierte Zahl ab, so muß, wenn richtig addirt worden ist, die Subtraction aufgehen, welches bei dem gegenwärtigen Exempel auch wirklich der Fall ist; nämlich:

828377 Summe der gegebenen Zahlen
730852 erste Zahl

„97525 Rest
66109 zweite Zahl

31416 Rest
31074 dritte Zahl

„„342 Rest
342 vierte Zahl

„„„

8. Welches ist die zweite Probe der Addition? Die andere und vielleicht beste Probe der Addition ist, daß man die gegebenen Zahlen zweimal addirt, und zwar einmal von oben herunter, und das anderemal von unten hinaufwärts. Erhält man beidemale einerlei Summe, so kann man in den meisten Fällen mit Gewißheit schließen, daß man richtig gerechnet habe.

9. Was für eine Probe hat man für die Subtraction?

Die Probe für die Subtraction ist einfach und untrüglich. Man addirt nämlich den Rest und den Subtrahendus, so muß der Minuendus wieder zum Vorschein kommen. Z. B.

8364 Minuendus
2812 Subtrahendus
5552 Rest

} beide addirt giebt die Sum. 8364, welches der Minuendus ist.

10. Worauf gründet sich diese Probe?

Sie gründet sich auf die Erklärung der Subtraction. Denn der Rest ist nach 7, 2; diejenige Zahl, welche anzeigt, wie viel Einheiten im Mi-

nuendus mehr enthalten sind, als im Subtrahendus; also muß natürlich die Summe des Restes und des Subtrahendus dem Minuendus gleich seyn.

11. Welches ist die Probe der Multiplication?

Die Probe der Multiplication besteht in Folgendem: man dividire das Product durch den Multiplicator, so muß der Multiplicandus; oder durch den Multiplicanden, so muß der Multiplicator als Quotient erscheinen. Z. B.

84 Multiplicandus
12 Multiplicator
168
84
1008 Product

Multiplicator | Product | Multiplicandus
12 | 1008 | 84
96
„48
48
„„

oder

Multiplicand | Product | Multiplicator
84 | 1008 | 12
84
168
168
„„„

12. Was für eine Probe wendet man bei der Division an?

Man multiplicirt den Quotienten mit dem Divisor, und addirt zu diesem Producte den etwa

gebliebenen Rest, so muß der Dividendus als Product erscheinen. Z. B.

24 | 68394 | 2849 Quotient } multiplicirt.
48 24 Divisor }

203 11396
192 5698
„119 68376
96 18 Rest addirt
234 68394 Dividendus
216
„18 Rest

13. Worauf 'gründen sich diese beiden letzt aufgeführten Proben?

Sie gründen sich auf die Erklärung der Multiplication und Division. Denn wenn nach dem Früheren multipliciren so viel heißt, als eine Zahl, den Multiplicandus, so vielmal setzen, als eine andere Zahl, der Multiplicator, Einheiten hat: so muß im Product der Multiplicandus so vielmal liegen, als der Multiplicator Einheiten hat; oder mit andern Worten: wenn man mit dem Multiplicanden in das Product dividirt, so muß der Multiplicator als Quotient erscheinen; denn mit einer Zahl in eine andere dividiren, heißt ja nichts anders, als, untersuchen, wie oft jene Zahl in dieser liegt. Da man nun (nach 8, 44, 45.) den Multiplicator als Multiplicanden, und diesen als jenen ansehen könnte, so kann man auch sagen: der Multiplicator muß im Producte so vielmal liegen, als der Multiplicandus Einheiten hat; oder mit andern Worten: wenn man mit dem Multi-

plicanden in das Product dividirt, so muß der Multiplicator als Quotient erscheinen.

Eben so geht aus der Erklärung der Division die Richtigkeit ihrer Probe hervor. Denn ist eine Zahl, der Divisor in einer andern, in dem Dividendus so vielmal enthalten, oder läßt sich jener aus diesem so vielmal wegnehmen, als der Quotient anzeigt: so muß, wenn ich den Divisor so vielmal setze, als der Quotient Einheiten hat, d. h. wenn ich den Divisor mit dem Quotienten (oder, was einerlei ist, den Quotienten mit dem Divisor) multiplicire, nothwendig der Dividendus als Product erscheinen. Z. B. 4 liegt in 24 6 mal, oder mit 4 in 24 dividirt giebt zum Quotienten 6. Setze ich die 4 also 6 mal und addire sie, oder was einerlei ist, multiplicire ich 4 mit dem Quotienten 6 oder umgekehrt, den Quotienten 6 mit 4, so muß der Dividendus 24 natürlich als Product erscheinen.

Eben so einleuchtend ist es, daß man den bei der Division etwa gebliebenen Rest zu dem Producte aus dem Quotienten und dem Divisor addiren müsse, um den Dividendus zu erhalten. Denn wenn am Ende einer Division ein Rest bleibt, so liegt der Divisor im Dividenden zwar so vielmal, als der Quotient anzeigt; aber es bleibt noch etwas vom Dividenden übrig; oder: wenn man den Divisor vom Dividenden so vielmal wegnimmt, als der Quotient anzeigt, so ist der Dividendus noch nicht erschöpft, sondern es bleibt noch etwas von ihm übrig. Will man also den Dividenden ganz wieder haben, so muß man nicht nur den Divisor

und Quotienten multipliciren, sondern auch den Rest zu diesem Producte addiren. Z. B.

326 | 4230021 | 12975 Quotient

326		Probe
„970		12975 Quotient } multipli-
652		326 Divisor } cirt.
3180		77850
2934		25950
„2462		38925
2282		4229850
„1801		171 Rest addirt
1630		4230021 Dividendus.
„171 Rest.		

Der Divisor 326 liegt im Dividenden 4230021 so vielmal, als der Quotient 12975 anzeigt, oder der Divisor kann 12975 mal aus dem Dividenden weggenommen werden; allein da bleibt, wenn man dies thut, vom Dividenden noch 171 übrig. Natürlich muß ich diesen Rest zum Producte aus dem Divisor und Quotienten addiren, um den Dividenden zu erhalten.

14. Gelten diese bisher aufgeführten Proben blos für die 4 Rechnungsarten mit ganzen, unbenannten Zahlen?

Nein, sie gelten eben so gut auch für die 4 Rechnungsarten mit benannten und gebrochenen Zahlen, welche weiter unten abgehandelt werden.

Eilftes Kapitel.

Vom Zerfällen der Zahlen.

1. Was heißt eine Zahl zerfällen?

Eine Zahl zerfällen, heißt: sie in diejenigen Zahlen auflösen, oder zerlegen, aus denen sie entstanden seyn kann.

2. Wie kann man sich eine Zahl entstanden denken?

Man kann sich eine Zahl auf zweierlei Weise entstanden denken, entweder durch Addition, oder durch Multiplication.

3. Wie kann man sich eine Zahl durch Addition entstanden denken?

Wenn man sie sich als die Summe zweier oder mehrerer Zahlen denkt. Z. B. die Zahl 8 kann ich mir aus den Zahlen 1, 3, 4 entstanden denken; und zwar so, daß diese Zahlen addirt wurden. Denn 1 + 3 + 4 giebt 8.

4. Wie kann man sich eine Zahl durch Multiplication entstanden denken?

Wenn man sich als ein Product zweier oder mehrerer Zahlen denkt. Z. B. die Zahl 8 kann ich mir als aus der Multiplication der Zahlen 2 und 4 entstanden denken; denn 2 . 4 giebt 8. Eben so kann man sich die Zahl 48 aus der Multiplication der Zahlen 2, 4, 6 entstanden denken; denn wenn man diese Zahlen nach 8, 48 mit einander multiplicirt, so erhält man die Zahl 48.

5. Auf wie vielerlei Art läßt sich also eine Zahl zerfällen?

Sie läßt sich nach dem vorhergehenden auf zweierlei Art zerfällen, nämlich durch Addition und durch Multiplication.

6. Was heißt eine Zahl durch Addition zerfällen?

Es heißt: sie in diejenigen Zahlen zerlegen, durch deren Additon sie entstanden seyn kann. Z. B. wenn ich die Zahl 8 in die Zahlen 1 + 3 + 4 zerlege, durch deren Addition sie entstanden seyn könnte, so habe ich sie durch Addition zerfällt. So könnte man 8 auch in 1, 2, 5; oder in 4, 4; oder in 1, 2, 6; oder in 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, zerfällen, weil, wenn man 1, 2, 5; oder 4, 4 u. s. w. addirt, die Zahl 8 zum Vorschein kommt.

7. Auf welche Art kann man jede Zahl durch Addition zerfällen?

Es finden da 2 Fälle statt; entweder ist eine Zahl vorgeschrieben, die sich unter denen mit befinden soll, in welche man die gegebene Zahl zerfällen will; oder es ist keine Zahl bestimmt.

1) Im ersten Falle ziehe man die vorgeschriebene Zahl, die natürlich kleiner seyn muß, als diejenige Zahl, welche zerfällt werden soll, von dieser ab, so hat man sie in zwei Zahlen zerfällt, deren eine die vorgeschriebene Zahl, welche man abgezogen hat, ist; die andere der gebliebene Rest. Z. B. es soll die Zahl 8 durch Addition zerfällt werden, doch so, daß die Zahl 2 sich mit unter den Zahlen befinden soll, in die man sie zerfällen will. Man zieht 2 von 8 ab, so sind der Rest 6 und die vor-

geschriebene Zahl 2 die Zahlen, in welche man die 8 zerfällt hat. Denn 2 + 6 ist 8. Will man sie noch in mehrere Zahlen zerfällen, so nehme man eine beliebige Zahl, kleiner als der gebliebene Rest 6, und ziehe sie von diesem ab, so sind die beliebig gewählte Zahl, der nunmehrige Rest, und die vorgeschriebene Zahl die Zahlen, in welche man die Zahl 8 zerfällt hat. Z. B.

8
2 vorgeschriebene Zahl
6
3 beliebig gewählte Zahl
3 Letzter Rest

2, 3, 3 sind also die Zahlen, in welche man 8 zerfällt hat; denn 2 + 3 + 3 ist 8. Eben so könnte man fortfahren, bis man zum letzten Reste 1 erhält; und man könnte die Zahl 8 noch in mehrere Zahlen zerfällen.

Wenn 2 oder mehrere Zahlen vorgeschrieben wären, welche sich unter denen befinden sollten, in welche man eine Zahl zerfällen wollte, so wäre das Verfahren dasselbe. Nur müssen die vorgeschriebenen Zahlen so beschaffen seyn, daß sie zusammen addirt kleiner sind, als die zu zerfällende Zahl. Z. B.

18 zu zerfällende Zahl
3 vorgeschriebene Zahl
15
7 vorgeschriebene Zahl
8
2 vorgeschriebene Zahl
6
5 beliebige Zahl
1 Letzter Rest.

3, 7, 2, 5, 1 sind also die Zahlen, in welche 18 zerfällt werden kann, und es befinden sich darunter die vorgeschriebenen Zahlen 3, 7 und 2. Denn 3 + 7 + 2 + 5 + 1 ist 18.

2) Im zweiten Falle, wenn nämlich keine Zahl vorgeschrieben ist, die sich unter denen befinden soll, in welche eine Zahl zerfällt werden soll, verfährt man ganz auf gleiche Weise, wie im ersten; nur daß man zuerst von der zu zerfällenden Zahl eine beliebige kleinere subtrahirt. Z. B.

12 zu zerfällende Zahl
4 beliebige Zahl
8
3 beliebige Zahl
5
2 beliebige Zahl
3 Letzter Rest.

Man hat hier 12 zerfällt in 4, 3, 2, 3. Denn wenn man diese Zahlen addirt, so erhält man 12.

8. Worauf beruht der Beweis für die Richtigkeit dieses Verfahrens?

Der Beweis für die Richtigkeit des vorgeschriebenen Verfahrens beruht darauf, daß der Rest zum Subtrahendus addirt, den Minuenden giebt (10, 9. 10).

9. In welche Zahlen kann man jede Zahl zerfällen?

Man kann jede Zahl in Einsen zerfällen; denn man kann sich jede, nicht nur einfache, sondern auch zusammengesetzte Zahl entstanden denken, durch die Addition mehrerer Einsen, und zwar so vielen als die Zahl selbst anzeigt. Z. B. 4 kann man zerfällen in 1 + 1 + 1 + 1.

10. In welche Zahl kann man jede zusammengesetzte Zahl am bequemsten zerfällen?

Jede zusammengesetzte Zahl kann man am bequemsten in ihre Einer, Zehner, Hunderte u. s. w. zerfällen; z. B. 39 kann man zerfällen in 30 und 9; denn 30 + 9 ist 39. Eben so kann man 4798 zerfällen in 4000 + 700 + 90 + 8.

11. Ist dieses Zerfällen der Zahlen durch Addition in der Rechenkunst von Nutzen?

Der Nutzen des Zerfällens der Zahlen durch Addition ist nicht sehr groß; allein in manchen Fällen kann man es doch bei der Multiplication mit Vortheil anwenden, wenn man nämlich den Multiplicator in 2 oder mehrere Zahlen, und zwar nach 10 in seine Einer, Zehner u. s. w. zerfällt. Z. B.

3642 × 18. Man zerfällt 18 in 10 + 8

36420		3642
29136		18
65556		29136
		3642
		65556

Man zerfällt den Multiplicator 18 in 10 + 8; multiplicirt sodann den Multiplicanden erst durch 10, welches nach 8, 38 leicht geschieht, indem man ihm 0 anhängt; man erhält 36420. Nun multiplicire man den Multiplicanden 3642 durch 8, giebt 29136. Diese beiden Producte addire man, so erhält man das verlangte Product der Zahlen 3642 und 18. Die Richtigkeit erhellet leicht; denn ich habe den Multiplicanden erst 10 mal, dann 8 mal genommen, und diese Producte addirt. Ihre Summe muß also den Multiplicanden 10 und 8, d. h. 18 mal enthalten.

Man erwäge noch folgende Beispiele:

1) 468 × 100 6. Der Multiplicator 1006 wird hier zerfällt in 1000 + 6; und die Rechnung ist:

468000 der Multiplicandus mit 1000 multipl.
2808 = = = = 6 = } addirt

470808 Product aus 468 und 1006.

Nach der gewöhnlichen Art würde es so stehen:

468
1006
2808
468
470808

2) 834 × 6. Den Multiplicator 6 zerfälle man in 2 + 4, und multiplicire so:

1668 der Multiplicandus mit 2 multiplicirt 834
3336 = = = = 4 = = 6
5004 Product aus 834 und 6. 5004

Hier ist freilich die gewöhnliche Art zu multipliciren kürzer und leichter.

12. Was heißt eine Zahl durch Multiplication zerfällen?

Eine Zahl durch Multiplication zerfällen, heißt Zahlen aufsuchen, durch deren Multiplication sie entstanden seyn kann. (vergl. 11, 4).

13. Wie sagt man noch für: „eine Zahl in diejenigen Zahlen zerfällen, durch deren Multiplication sie entstanden seyn kann?

Man sagt dafür auch noch: „eine Zahl in ihre Factoren zerfällen, weil 2 oder mehrere Zahlen, welche mit einander multiplicirt werden sollen, auch Factoren heißen (nach 8, 11.)

14. Kann man jede Zahl in Factoren zerfällen?

Nein! Es giebt Zahlen, die nicht durch die Multiplication anderer Zahlen entstanden seyn können, und diese kann man natürlich auch nicht in Factoren zerfällen. Dergleichen Zahlen sind z. B. 1, 2, 3, 5, 7, 11 u. s. w. Man nennt solche Zahlen einfache Zahlen, oder Primzahlen; diejenigen aber, welche durch die Multiplication anderer Zahlen entstanden seyn können, und also in Factoren zerfällt werden können, nennt man zusammengesetzte Zahlen.

15. Wie kann man sehen, daß eine Zahl eine einfache oder eine zusammengesetzte Zahl ist?

Man kann dies mit Hülfe der Division jederzeit leicht erfahren. Läßt sich nämlich eine Zahl durch eine andere von ihr selbst und der Einheit verschiedene Zahl ohne Rest dividiren, so ist es

eine zusammengesetzte Zahl; läßt sich aber eine Zahl nur durch sich selbst und die Einheit ohne Reste dividiren, so ist es eine einfache Zahl, oder eine Primzahl. Man kann daher auch sagen: Primzahlen sind solche, die sich nur durch sich selbst und durch die Einheit ohne Rest dividiren lassen.

16. Giebt es Kennzeichen, nach denen man beurtheilen kann, ob eine Zahl durch eine andere Zahl ohne Rest dividirt werden kann?

Allgemeine Kennzeichen, nach welchen man bei jeder gegebenen Zahl sehen könnte, ob sie durch eine andere ohne Rest dividirt werden kann, giebt es nicht; wohl aber lassen sich einige besondere Regeln geben, die uns in den Stand setzen, bei manchen Zahlen zu beurtheilen, ob und durch welche Zahlen sie ohne Rest dividirt werden können. Diese Regeln muß man sich wohl merken.

17. Wie heißt die erste Regel?

1) Eine Zahl, deren letzte Ziffer 0 oder gerade ist, läßt sich durch 2 ohne Rest dividiren. Z. B. 48, 160, 716 8, 3654790 u. s. w.

18. Wie heißt die zweite Regel?

2) Eine Zahl läßt sich durch 3 ohne Rest dividiren, wenn alle Ziffern, ohne auf ihre Stelle zu sehen, als Einer addirt eine Summe geben, die durch 3 ohne Rest dividirt werden kann. Z. B. 376521; hier ist die Summe der einzelnen Ziffern, nämlich $3+7+6+5+2+1$ gleich 24. Da nun 24 durch 3 ohne Rest dividirt werden kann, so kann auch die Zahl 376521 ohne Rest dividirt werden.

19. Wie heißt die dritte Regel?

3) Wenn die 2 letzten Ziffern einer Zahl durch 4 theilbar sind, so ist es auch die Zahl selbst. Z. B. 879236; hier können die zwei letzten Ziffern, nämlich 36, durch 4 ohne Rest dividirt werden, also auch die Zahl 879236.

20. Welches ist die vierte Regel?

4) Wenn die letzte Ziffer einer Zahl 0 oder 5 ist, so kann die Zahl durch 5 ohne Rest dividirt werden. Z. B. 367840; 8365; 78005 u. s. w.

21. Welches ist die fünfte Regel?

5) Wenn eine Zahl nach der ersten Regel durch 2, und nach der zweiten Regel durch 3 ohne Rest dividirt werden kann, so läßt sie sich durch 6 ohne Rest dividiren. Z. B. 89352, 47850012 u. s. w.

22. Wie heißt die sechste Regel?

6) Lassen sich die drei letzten Ziffern einer Zahl durch 8 ohne Rest dividiren, oder sind die 3 letzten Ziffern Nullen, so läßt sich auch die Zahl selbst durch 8 ohne Rest dividiren. Z. B. 512104; hier lassen sich die 3 letzten Ziffern, nämlich 104 durch 8 ohne Rest dividiren, also auch die Zahl 512104. Eben so läßt sich die Zahl 6783000 durch 8 ohne Rest dividiren.

23. Wie heißt die siebente Regel?

7) Wenn die Summe sämmtlicher Ziffern einer Zahl durch 9 ohne Rest dividirt werden kann, so kann auch die Zahl selbst durch 9 ohne Rest dividirt werden. Z. B. 1782945; addirt man

hier die Ziffern dieser Zahl, ohne auf die Stelle zu sehen, in welcher sie stehen, nämlich 1 + 7 + 8 + 2 + 9 + 4 + 5, so erhält man 36; da nun 36 durch 9 ohne Rest dividirt werden kann, so kann es auch die Zahl 1782945.

24. Wie heißt die achte Regel?

8) Wenn eine Zahl am Ende eine oder mehrere Nullen hat, so kann sie durch 10 ohne Rest dividirt werden; z. B. 2400, 80, 76390 u. s. w.

25. Welches ist die neunte Regel?

9) Wenn eine Zahl nach der zweiten Regel durch 3, und nach der dritten Regel durch 4 zugleich ohne Rest dividirt werden kann, so kann die Zahl durch 12 ohne Rest dividirt werden. Z. B. 63144.

26. Lassen sich nicht auch Regeln geben, die uns in den Stand setzen, zu beurtheilen, ob eine Zahl durch die nicht erwähnten Zahlen 7, 11, 13, 14, 17 u. s. w. ohne Rest dividirt werden kann?

Es ließen sich allerdings auch für diese nicht erwähnten Zahlen Regeln auffinden; aber die Untersuchung würde mehr Zeit kosten, als die Division selbst. Diese Regeln wären daher ohne Nutzen.

27. Wie läßt sich eine zusammengesetzte Zahl in ihre Factoren zerfällen?

Es können hier zwei Fälle statt finden. Entweder wird blos im Allgemeinen verlangt, eine gegebene zusammengesetzte Zahl in eine beliebige Anzahl von Factoren zu zerfällen; oder es wird verlangt, die gegebene Zahl in lauter solche Factoren zu zerfällen, die Primzahlen sind.

1) Im ersten Falle hat man weiter nichts zu thun, als daß man die gegebene Zahl durch irgend eine von ihr selbst und der Einheit verschiedene Zahl, die in ihr aufgeht, dividirt. Diese Zahl, mit welcher man dividirt hat, und der Quotient sind die Factoren, in welche die gegebene Zahl zerfällt werden kann. Wollte man die gegebene Zahl in mehr als 2 Factoren, vielleicht 3, zerfällen, so suche man von neuem eine Zahl, die in dem gefundenen Quotienten ohne Rest aufgeht, und dividire ihn damit. Dann sind der erste Divisor die neue Zahl, mit der man den ersten Quotienten dividirte, und der letzte Quotient die 3 Factoren, in welche die gegebene Zahl zerfällt ist.

Es sey z. B. die Zahl 576 gegeben; man soll sie in 2 oder mehrere beliebige Factoren auflösen. Man dividirt diese Zahl durch eine von der Einheit und von ihr selbst verschiedene Zahl, die in ihr aufgeht, vielleicht durch 6

6 | 576 | 96
54
„36
36
„„

so sind 6 und der Quotient 96 2 Factoren, in welche sich die Zahl 576 zerlegen läßt. Denn 6×96 ist 576. Sollte diese Zahl in 3 Factoren zerlegt werden, so dividirt man den Quotienten 96 aufs neue durch eine beliebige Zahl, die in ihm aufgeht, vielleicht durch 8, nämlich

$$\begin{array}{c|c|c|c} 6 & 576 & 96 & 12 \\ & \overset{\frown}{54} & \overset{\frown}{8} & \\ \hline & 36 & 16 & \\ & \overline{\text{„}36} & \overline{16} & \\ & 36 & 16 & \\ & \overline{\text{„„}} & \overline{\text{„„}} & \end{array}$$

so sind 6, 8 und der letzte Quotient 12 die 3 Factoren; denn $6 \times 8 \times 12$ ist 576.

2) Wird aber verlangt, daß man eine zusammengesetzte Zahl in lauter solche Factoren zerfällen soll, die Primzahlen sind, so dividire man die gegebene Zahl durch die kleinste Zahl, die in ihr aufgeht; den Quotienten abermals durch die kleinste Zahl, die in ihm aufgeht, u. s. f. bis der Quotient 1 zum Vorschein kommt. Die Zahlen, mit denen man dividirt hat, sind die verlangten Factoren. Wäre die gegebene Zahl z. B. 576, so müßte man auf folgende Art verfahren:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} 2 & 576 & 288 & 144 & 72 & 36 & 18 & 9 & 3 & 1 \\ & \overset{\frown}{4} & \overset{\frown}{2} & \overset{\frown}{14} & \overset{\frown}{6} & \overset{\frown}{2} & \overset{\frown}{18} & \overset{\frown}{9} & \overset{\frown}{3} & \\ \hline & 17 & \text{„}8 & \text{„„}4 & 12 & 16 & \text{„„} & \text{„} & \text{„} & \\ & 16 & 8 & 4 & 12 & 16 & & & & \\ \hline & \text{„}16 & \text{„}8 & \text{„} & \text{„„} & \text{„„} & & & & \\ & 16 & 8 & & & & & & & \\ \hline & \text{„„} & \text{„} & & & & & & & \end{array}$$

Die einfachen Factoren der Zahl 576 sind also: 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3; denn wenn man diese

Zahlen zusammen multiplicirt, so kommt 576; und diese Factoren sind lauter Primzahlen.

Wäre die gegebene Zahl 1260; so verfährt man auf eben die Art; nämlich:

	2	3	3	5	7	
2	1260	630	315	105	35	7	1
	12	6	3	9	35	7	
	„„6	„3	„15	15	„„	„	
	6	2	15	15			
	„0	10	„„	„„			
		10					
		„„					

Die einfachen Factoren der Zahl 1260 sind also 2, 2, 3, 3, 5, 7.

28. Worauf beruht dieses Verfahren?

Daß dieses Verfahren richtig sey, beruht darauf, daß der Divisor und Quotient zusammen multiplicirt den Dividendus zum Vorschein bringen.

29. Ist das Zerfällen der Zahlen in ihre Factoren nützlich?

Allerdings! Man kann sich dadurch das Multipliciren oft erleichtern, in dem man den Multiplicator in 2 oder mehrere Factoren zerlegt, und dann mit denselben einzeln multiplicirt, und zwar so, daß man den Multiplicandus zuerst mit dem ersten dieser Factoren, das so erhaltene Product mit dem zweiten Factor u. s. f. multiplicirt. Z. B. 785429 × 64 müßte nach der gewöhnlichen Art so stehen:

785429
64
3141716
4712574
50267456

Leichter kommt man hinweg, wenn man den Multiplicator 64 in 2 Factoren, in 8 . 8 zerfällt, und mit denselben einzeln auf folgende Art multiplicirt:

785429 Multiplicandus
8 erster Factor
6283432 erstes Product
8 zweiter Factor
50267456 vollständiges Product.

Man hat hier nicht nur 7 Ziffern erspart, sondern auch das Addiren vermieden. Die Richtigkeit dieses Verfahrens leuchtet ein. Der obige Multiplicandus soll mit 64 multiplicirt, d. h. 64 mal genommen werden. Nehme ich ihn zuerst 8 mal, und dieses 8fache wiederum 8 mal, so habe ich den Multiplicandus im Ganzen eben 64 mal genommen, oder mit 64 multiplicirt. — Man beachte noch folgende 2 Beispiele:

1) 847362×216. Der Multiplicator 216 wird in die drei Factoren 6, 9, 4 zerfällt und so multiplicirt:

847362
6 erster Factor

5084172 erstes Product
9 zweiter Factor

45757548 zweites Product
4 dritter Factor

183030192 vollständiges Product.

2) 987654 × 3456. Den Multiplicator 3456 zerfällt man in 9 . 8 . 8 . 6, und multiplicire so:

987654
9

8888886
8

71111088
8

568888704
6

3413332224

Eben so kann man sich zuweilen durch das Zerfällen der Zahlen in ihre Factoren das Dividiren erleichtern. Wenn z. B. gegeben ist 83644 : 36; so zerfälle man den Divisor in die 2 Factoren 4 . 9, dividire mit dem ersten Factor den Dividendus, und sodann den so gefundenen Quotienten mit dem zweiten Factor; nämlich:

9

9

4 | 83644 | 20911 | 2323 Quotient.

8 18

„36 „29

36 27

„„4 „21

4 18

„4 31

4 27

„ „4 Rest.

Eben so, wenn gegeben ist 26280 : 72; so zerfällt man den Divisor 72 in die 2 Factoren 8 . 9, und dividire auf folgende Art:

9

8 | 26280 | 3285 | 365

24 27

„22 „58

16 54

„68 „45

64 45

40 „„

40

„„

Man muß aber hier bei der Division die Factoren so einzurichten suchen, daß der eine im Dividendus aufgeht, und mit diesem dividire man zuerst. Ueberhaupt aber ist das Zerfällen der Zahlen in ihre Factoren bei der Division von weit geringerem Nutzen, und weniger vortheilhaft anzuwenden, als bei der Multiplication.

30. Ist das Zerfällen der Zahlen in ihre Factoren außerdem noch nützlich?

Ja, es ist auch bei der Rechnung mit Brüchen von nicht unbedeutendem Nutzen, wie wir später sehen werden.

Zweites Hauptstück.

Von ganzen benannten Zahlen.

Zwölftes Kapitel.

Von der Reduction benannter Zahlen.

1. Was ist eine benannte Zahl?

Eine benannte Zahl ist (nach 2, 6) eine solche, bei welcher angezeigt wird, was für ein Ding die Einheit sey. So ist z. B. 6 Thaler eine benannte Zahl; denn es wird angegeben, daß die Einheit ein Thaler sey. Eben so sind 12 Pfd., 14 Ellen u. s. w. benannte Zahlen.

2. Was versteht man unter Reduction benannter Zahlen?

Man versteht darunter das Verfahren, wodurch Größen einer Art in Größen anderer Art verwandelt werden; z. B. Thaler in Groschen, Lothe in Pfunde u. s. w. und umgekehrt.

3. Was muß man erst kennen, um Größen in einander verwandeln zu können?

Man muß die verschiedenen Eintheilungen der Größen kennen, d. h. man muß wissen, wie viel

Einheiten der einen Art auf eine Einheit der andern Art gehen; z. B. wie viel Groschen 1 Thaler, oder wie viel Lothe 1 Pfd. u. s. w. hat.

4. Wie kann man das erfahren?

Man lernt dies entweder aus dem gemeinen Leben, oder aus Büchern.

5. Wenn man nun die verschiedenen Eintheilungen der Größen kennt: wie kann man Größen in andere verwandeln, oder auf andere reduciren?

Das Verfahren hat dann weiter keine Schwierigkeit. Man kann zwei Fälle dabei unterscheiden. Es wird nämlich entweder

1) verlangt, Größen irgend einer Gattung in Größen einer kleinern Gattung zu verwandeln; z. B. Thaler in Groschen; oder Groschen in Pfennige; Centner in Pfunde; Pfunde in Lothe u. s. w. oder

2) Größen einer niedrigern Gattung in Größen einer höhern Gattung zu verwandeln; z. B. Groschen in Thaler; Pfennige in Groschen; Lothe in Pfunde u. s. w.

6. Welche Regel hat man beim ersten Falle zu beobachten, wenn man nämlich Größen irgend einer Gattung in Größen einer kleinern Gattung verwandeln will?

Die Regel, welche man dabei beobachten muß, ist folgende:

Man multiplicire die gegebene Menge der größern Gattung mit der Zahl, welche anzeigt, wie viel Einheiten der kleinern Gattung in Einer Einheit der gegebenen größern Gattung liegen.

7. Wie läßt sich dies durch ein Beispiel deutlich machen?

Es wird z. B. verlangt, man soll 16 Thaler in Groschen verwandeln. Wenn man weiß, daß 24 Groschen 1 Thaler sind, so hat dies keine Schwierigkeit; denn man braucht dann nach der gegebenen Regel die gegebene Anzahl der größern Gattung, hier also die 16 Thaler, mit 24, als derjenigen Zahl zu multipliciren, welche anzeigt, wie viel Einheiten der kleinern Gattung, in welche die größere, hier Thaler, verwandelt werden soll, hier Groschen, auf eine Einheit der größern gehen. Also

16 Thlr.		86 Pfd.
24	eben so	32
64		172
32		258
384 Groschen.		2752 Lothe.

Die 16 Thaler betragen also 384 Groschen; die 86 Pfd. aber 2752 Lothe.

8. Wie verfährt man, wenn die kleinere Gattung, in welche eine größere verwandelt werden soll, nicht zunächst auf diese größere folgt?

Man kann dann auf zweierlei Art verfahren. Entweder verwandelt man die gegebene Menge der größern Gattung zuerst in die nächst kleinere, und diese wieder in die nächst folgende, bis zu der gesuchten kleinern; oder man verwandelt die gegebene Menge der größern Gattung unmittelbar in die verlangte kleinere Gattung, indem man sie mit der Zahl multiplicirt, welche anzeigt, wie viel Einheiten der verlangten kleinern Gattung auf Eine

Einheit der zu verwandelnden größern Gattung gehen. Würde z. B. verlangt, 112 Thaler in Pfennige zu verwandeln, so könnte man sie erst zu Groschen machen, indem man sie mit 24 multiplicirte, und diese so gefundenen Groschen durch die Multiplication mit 12 in Pfennige verwandeln; nämlich:

112 Thaler
24
448
224
2688 Groschen
12
5376
2688
32256 Pfennige.

Die 112 Thaler betrügen also 32256 Pfennige. Man könnte diese 112 Thaler aber auch unmittelbar in Pfennige verwandeln, wenn man sie mit der Zahl multiplicirte, welche anzeigt, wie viel Pfennige auf einen Thaler gehen, also mit 288; denn 288 Pfennige machen einen Thaler. Man würde auf dasselbe Resultat kommen, wie vorher. Denn

112 Thaler
288
896
896
224
32256 Pfennige.

Eben so, wenn 24 Pfd. in Quentchen zu verwandeln wären

24
32
48
72
768 Loth
4
3072 Quentch.

oder:

24
128
192
48
24
3072 Quentch.

Die erstere Verfahrungsart ist in den meisten Fällen der zweiten vorzuziehen.

9. Wie hat man zu verfahren, wenn man Größen einer kleinern Gattung in Größen einer größern verwandeln will?

Man hat dann weiter nichts zu thun, als die gegebene Menge der kleinern Gattung mit derjenigen Zahl zu dividiren, welche anzeigt, wie viel Einheiten der gegebenen kleinern Gattung zu einer Einheit der nächst größern Gattung gehören. Der Quotient zeigt an, wie viel Einheiten der nächst größern Gattung in der gegebenen Anzahl der kleinern Gattung enthalten sind; der etwa gebliebene Rest zeigt die übrig gebliebenen Einheiten der gegebenen kleinern Gattung an. Sollten im Quotienten Einheiten noch größerer Gattungen stecken, so wiederholt man das angezeigte Verfahren. Z. B. 1546 Pf. sollen in Groschen und Thaler verwandelt werden. Dies geschieht, indem man diese Zahl erst mit 12 dividirt, da 12 Pf. 1 Groschen ausmachen; der Quotient heißt Groschen; diesen dividirt man mit 24, weil 24 Gr. 1 Thlr. machen, so erhält man Thaler. Nämlich

$$\begin{array}{r|l|l|l} & & \overbrace{\quad\quad}^{24} & \\ 12 & 1546\ \text{Pf.} & 128\ \text{Gr.} & 5\ \text{Thlr.} \\ \hline & 12 & 120 & \\ \hline & \text{„}34 & \text{„„}8\ \text{Gr.} & \\ & 24 & & \\ \hline & 106 & & \\ & 96 & & \\ \hline & 90\ \text{Pf.} & & \end{array}$$

1546 Pf. sind also 5 Thlr. 8 Gr. 10 Pf. Eben so, wenn man 14892 Loth in Pfd. und Ctr. verwandeln soll:

110

32 | 14892 Loth | 465 Pfd. | 4 Ctr.
128 440
„209 „25 Pfd.
192
„172
160
„12 Loth.

10. Wie verfährt man, wenn die größere Gattung, in welche die gegebene kleinere Gattung verwandelt werden soll, nicht zunächst auf diese kleinere folgt?

Man verwandelt dann entweder die gegebene Menge der kleinern Gattung zuerst in die nächst größere, und diese kann wieder in die nächst folgende größere Gattung, bis man zu der verlangten kommt; oder man verwandelt sie unmittelbar in die verlangte größere Gattung, indem man sie mit derjenigen Zahl multiplicirt, welche anzeigt, wie viele Einheiten der gegebenen kleinern Gattung auf Eine Einheit der verlangten größern gehen.

Wenn z. B. verlangt würde 438712 Lothe in Ctr. zu verwandeln; so kann man sie zuerst in Pfunde verwandeln, indem man sie mit 32 dividirt, und die so gefundenen Pfunde wiederum in Ctr., indem man sie mit 110 dividirt; nämlich:

110

32 | 438712 Loth | 13709 Pfd. | 124 Ctr.

32	110
118	„270
96	220
227	„509
224	440
„„312	„69 Pfd.
288	
„24 Loth.	

Man hätte also gefunden, daß die gegebenen Lothe so viel betrügen, als 124 Ctr. 69 Pfd. 24 Loth. Wollte man die gegebenen Lothe unmittelbar in Ctr. verwandeln, so müßte man sie mit derjenigen Zahl dividiren, welche anzeigt, wie viel Lothe auf einen Ctr. gehen. Dies würde 3520 seyn; also:

3520 | 438712 Lothe | 124 Ctr.

3520
„8671
7040
16312
14080
„2232 Lothe.

Machte man diese übrig gebliebenen Lothe zu Pfunden, so würde man nun eben das erhalten, was man vorhin erhielt, nämlich 124 Ctr. 69 Pfd. 24 Loth. — Man sieht übrigens leicht, daß die erstere Verfahrungsart der letztern bei weitem vorzuziehen ist.

11. Was hat es für einen Nutzen, Größen der einen Art in Größen einer andern Art verwandeln zu können?

Es hat einen zweifachen Nutzen. Denn:

1) ist es oft der Fall, daß eine benannte Zahl durch eine Zahl getheilt werden soll, die größer ist, als sie selbst. Man muß dann die benannte Zahl in eine kleinere Gattung verwandeln. Z. B. wenn sich 12 Personen in 8 Thaler theilen sollten, und man wollte wissen, wie viel auf jede käme, so müßte man die 8 Thaler erst in Groschen verwandeln, und nun mit 12 hinein dividiren.

2) Kann man auch durch dieses Verwandeln mehrere zusammengehörige benannte Zahlen auf einerlei Benennung bringen, welches, wie in der Folge ersichtlich werden wird, bei den Rechnungsarten mit benannten Zahlen oft nöthig ist. Wollte man z. B. wissen, wie viel Pfennige 23 Thlr. 7 Gr. 9 Pf. wären, so müßte man die 23 Thlr. erst durch die Multiplication mit 24 zu Groschen machen, die vorhandenen 7 Gr. dazu addiren, diese Groschen durch die Multiplication mit 12 zu Pfennigen, und die noch vorhandenen 9 Pfennige dazu addiren, so hätte man die 23 Thlr. 7 Gr. 9 Pf. in Pfennige verwandelt. Nämlich:

23 Thlr. 7 Gr. 9 Pf.
24
92
46
552 Groschen
7 die vorhandenen Groschen addirt
559
12
1118
559
6708 Pfennige
9 die vorhandenen Pfennige addirt
6717 Pfennige.

Dreizehntes Kapitel.

Addition und Subtraction ungleichbenannter Zahlen.

1. Was sind gleichbenannte Zahlen?

Gleichbenannte Zahlen sind solche Zahlen, deren Einheit einerlei Namen hat. So sind 4 Thlr. und 7 Thlr. gleichbenannte Zahlen; denn in beiden heißt die Einheit ein Thlr. Eben so 7 Pf. und und 9 Pf.; 8 Pfd. und 23 Pfd. u. s. w.

2. Bedarf es besonderer Regeln, um solche gleichbenannte Zahlen zu addiren, subtrahiren, multipliciren und zu dividiren?

Nein, es bedarf keiner besondern Vorschriften dazu; man verfährt bei ihnen auf eben die Art, wie bei unbenannten Zahlen.

3. Was ist jedoch bei der Multiplication solcher gleichbenannten Zahlen zu merken?

Es ist zu merken, daß der Multiplicator allemal eine unbenannte Zahl seyn muß.

4. Was ist die Ursache hiervon?

Die Ursache ist, weil man sich gar nichts Vernünftiges dabei denken kann, wenn man eine benannte Zahl durch eine andere benannte Zahl multipliciren soll. Sollte man z. B. 8 Thlr. mit 3 Thlr. multipliciren, so hieße das mit andern Worten: man soll die 8 Thlr. 3 Thalermal nehmen, was keinen Sinn hat. Wohl aber kann man die 8 Thaler mit der unbenannten Zahl 3 multipliciren, d. h. sie 3 mal nehmen.

5. Was sind ungleichbenannte Zahlen?

Ungleichbenannte Zahlen sind solche benannte Zahlen, deren Einheiten verschiedene Namen haben. So sind 8 Thlr. und 3 Pfd. ungleichbenannte Zahlen; denn in der erstern ist die Einheit ein Thaler, in der zweiten aber ein Pfund. Eben so sind 12 Thlr. und 7 Loth, 3 Ctr. und 14 Ellen u. s. w. ungleichbenannte Zahlen. Daß dergleichen Zahlen weder addirt noch subtrahirt werden können, erhellet daraus, daß nur gleichartige Zahlen addirt und subtrahirt werden können.

6. Man spricht aber oft von Einer ungleichbenannten Zahl: was versteht man darunter?

Man versteht darunter eine solche Zahl, die aus verschiedenen Gattungen von Zahlen besteht, die sich aber alle auf Eine Gattung bringen lassen. Z. B. 3 Thlr. 19 Gr. 7 Pf.; 7 Loth, 3

Quentchen; 4 Malter, 8 Scheffel, 3 Viertel, 1 Metze u. s. w. Und dergleichen Zahlen versteht man, wenn man von den Rechnungsarten mit ungleichbenannten Zahlen spricht.

7. Wie hat man zu verfahren, wenn man solche ungleichbenannte Zahlen addiren soll?

Das Verfahren ist folgendes: man bringt die gegebenen ungleichbenannten Zahlen auf einerlei Namen, indem man sie, wie es im vorigen Kapitel gelehrt worden ist, in die kleinste Gattung verwandelt, welche vorkommt, und addirt dann die so verwandelten Zahlen nach eben den Regeln, die bei unbenannten Zahlen beobachtet werden mußten. Man erhält auf diese Art die Summe der gegebenen Zahlen in der kleinsten Gattung ausgedrückt. Diese kann man nun (nach Kap. 12, 9) wieder in Größen höherer Gattungen verwandeln.

8. Wie läßt sich dieses Verfahren durch ein Beispiel erläutern?

Es sind z. B. folgende ungleichbenannte Zahlen zum Addiren gegeben: 3 Thlr. 10 Gr. 5 Pf., 2 Thlr. 8 Gr. 3 Pf., 4 Thlr. 9 Gr. Man verwandelt jede dieser Zahlen in Pfennige, und addirt diese Pfennige dann; nämlich:

die erste Zahl giebt	989 Pf.	} addirt giebt
die zweite = = =	675 —	
die dritte = = =	1260 —	
	2924 Pf.	

Die Summe der gegebenen ungleichbenannten Zahlen haben wir also in Pfennigen gefunden; sie beträgt 2924 Pf. Will man diese Summe nun

in Thalern und Groschen ausdrücken, so verwandelt man diese Pfennige nach dem vorigen Kapitel in Groschen und Thaler, und man findet dann, daß die Summe 10 Thlr. 3 Gr. 2 Pf. beträgt.

9. Giebt es noch ein anderes Verfahren, ungleichbenannte Zahlen zu addiren?

Allerdings giebt es noch ein anderes Verfahfahren, welches dem vorigen weit vorzuziehen ist, da es nicht so weitläuftig und mühsam ist. Es besteht darin, daß man die gegebenen Zahlen nicht erst in Einheiten der kleinsten Gattung verwandelt; sondern dieselben unmittelbar addirt.

10. Welche Regeln hat man bei diesem zweiten Verfahren zu beobachten?

Man hat folgende Regeln dabei zu beobachten:

1) Man ordne die gegebenen ungleichbenannten Zahlen so unter einander, daß alle diejenigen, welche gleiche Namen führen, untereinander zu stehen kommen; nämlich Thaler unter Thaler, Groschen unter Groschen; Pfunde unter Pfunde, Lothe unter Lothe u. s. w.
2) Man schreibe auch, wie sich das eigentlich von selbst versteht, die Ziffern jeder Gattung richtig unter einander, d. h. Einer unter Einer, Zehner unter Zehner u. s. w.
3) Man fange bei der kleinsten Gattung, die man gewöhnlich in die erste Stelle rechts setzt, und auf die man dann nach der Linken zu die nächst folgenden Gattungen folgen läßt, zu addiren an. Enthält die so gefundene Summe eine oder einige Einheiten der nächst größern

Gattung, so zieht man diese Einheiten heraus, vermittelst des im vorigen Kapitel angegebenen Verfahrens, und schreibe nur den Rest, oder wenn ein solcher nicht übrig bleiben sollte, einen Strich unter die addirte Gattung; die herausgezogenen Einheiten aber zählt man zu der Summe der nächst folgenden Gattung.

4) Auf ähnliche Art fahre man von Gattung zu Gattung fort, bis die Addition zu Ende ist.

11. Wie läßt sich dieses Verfahren durch ein Beispiel anschaulich machen?

Wenn man z. B. folgende ungleichbenannte Zahlen addiren soll: 8 Ctr. 7 Pfd. 16 Loth; 12 Ctr. 24 Pfd. 2 Loth; 58 Pfd. 12 Loth; und 16 Ctr. 29 Pfd.; so verfahre man auf folgende Art:

8	Ctr.	7	Pfd.	16	Loth
12	"	24	"	7	"
—	"	58	"	12	"
16	"	29	"	—	"
37	Ctr.	9	Pfd.	3	Loth.

Man schreibe die gegebenen Zahlen so unter einander, daß diejenigen Theile der Zahlen, die gleiche Namen führen, unter einander zu stehen kommen, nämlich Lothe unter Lothe, Pfunde unter Pfunde, und Ctr. unter Ctr. Nun fange man bei der kleinsten Gattung, also den Lothen an, und addire diese. Man würde 35 Lothe erhalten. In diesen 35 Lothen liegt eine Einheit der nächst größern Gattung, nämlich 1 Pfd., da ja 32 Loth 1 Pfd. ausmachen. Dieses Pfund ziehe man heraus, und addire es zu den Pfunden; die 3 Lothe,

die dann von den 35 Lothen noch übrig bleiben, schreibe man unter die addirten Lothe. Nun addire man die folgende Gattung, nämlich die Pfunde auf eben die Art, wie die Lothe. Man würde mit dem aus der Summe der Lothe herausgezogenem Pfunde 119 Pfd. erhalten. In diesen 119 Pf. liegt wiederum eine Einheit der nächst folgenden Gattung, nämlich 1 Ctr.; da ja 110 Pfd. 1 Ctr. ausmachen. Diesen Ctr. nimmt man heraus und addirt ihn zu den folgenden Ctrn.; die von den 119 Pfd. übrig bleibenden 9 Pfd. schreibt man unter die addirten Pfunde. Die Ctr. addirt man nun eben so. Man erhält mit dem aus der Summe der Pfunde gezogenen Ctr. 37 Ctr. Auf diese Art erhält man 37 Ctr. 9 Pfd. 3 Loth als die Summe der gegebenen ungleichbenannten Zahlen.

Folgende Beispiele sind auf eben dieselbe Art zu erklären, wie das Vorige.

1) 218 Thlr. 6 Gr. — Pf.
— = 23 = 11 =
54 = 1 = 5 =
2163 = 19 = 9 =
167 = 8 = 4 =

2604 Thlr. 11 Gr. 5 Pf.

2) 15 Ctr. 84 Pfd. 16 Loth
9 = 36 = 24 =
3 = 10 = — =
124 = — = 10 =

152 Ctr. 21 Pfd. 18 Loth.

3) 9 Malter 4 Scheffel 3 Viertel 1 Metze.
15 = 6 = 2 = — =
19 = 3 = — = — =
5 = 8 = 3 = 3 =

50 Malter 3 Scheffel 1 Viertel — Metze.

12. Wird das bisher beschriebene Verfahren geändert, wenn in einem Additionsexempel Karolin, Thaler und Groschen vorkommen?

Im Allgemeinen bleibt das Verfahren dasselbe; nur tritt in so fern eine kleine Verschiedenheit ein, in wiefern man die Thaler nicht unmittelbar auf Karolin zurückbringen kann (wenn der Karolin z. B. 6 Thlr. 12 Gr. gilt), und man muß daher in dergleichen Exempeln etwas anders zu Werke gehen.

13. Wie muß man da verfahren?

Man verwandelt die Summe der Thaler in Groschen, addirt sie zu der Summe der Groschen hinzu, und bringt dann die ganze Summe der Groschen auf Karolin. Bleibt von den Groschen hierbei ein Rest, in welchem noch Thaler stecken, so macht man ihn zu Thalern. Es ist dabei nöthig, zu berechnen, wie viel Groschen ein Karolin hat, wenn man ihn z. B. zu 6 Thlr. 12 Gr. rechnet. Man findet durch Reduction, daß er 156 Gr. hat.

14. Wie läßt sich dieses durch ein Beispiel deutlich machen?

Folgendes Beispiel und dessen Erklärung wird das Gesagte anschaulicher machen:

128	Karolin	5	Thlr.	18	Gr.
204	"	3	"	12	"
268	"	1	"	7	"
95	"	6	"	2	"
78	"	4	"	16	"
54	"	2	"	10	"
827	Karolin	21	Thlr.	65	Gr.

24
84
42
504
65
156 | 569 | 3 Karol.
468
24 | 101 | 4 Thlr.
96
5 Gr.

Die ganze Summe beträgt also 830 Karol. 4 Thlr. 5 Gr.

Erklärung: die Summe der Thaler macht in diesem Exempel 21 aus; diese verwandelt man in Groschen, indem man sie mit 24 multiplicirt, giebt 504 Gr.; hierzu die Summe der Groschen, welche 65 beträgt, addirt, giebt 569 Gr. Diese Groschen verwandelt man nun in Karolin, indem man mit 156 Gr. hinein dividirt. Man findet, daß in diesen Groschen 3 Karolin stecken, die man nun zu der Summe der Karolin addirt. Es bleiben aber noch von den 569 Gr. 101 Gr. übrig. Man verwandelt diese in Thaler, und findet, daß sie 4 Thlr. 5 Gr. betragen, und die ganze Summe

der gegebenen ungleichbenannten Zahlen macht nun 830 Karol. 4 Thlr. 5 Gr.

Ganz auf ähnliche Art ist folgendes Beispiel zu erklären, wo der Ducaten zu 3 Thlr. 4 Gr. gerechnet ist, und also auf 1 Ducaten 76 Gr. gehen:

18	Duc.	2	Thlr.	7	Gr.
5	=	3	=	—	=
103	=	—	=	23	=
9	=	1	=	19	=
57	=	3	=	20	=
192	Duc.	9	Thlr.	69	Gr.

24
216
69
76 | 285 | 3 Duc.
228
24 | „57 | 2 Thlr.
48
„9 Gr.

Die ganze Summe beträgt also nun 195 Duc. 2 Thlr. 9 Gr.

Ueberhaupt ist zu merken, daß es, zumal für Anfänger, bei allen Exempeln, in denen eine Art von Größe sich nicht unmittelbar auf die nächste zurückführen läßt, auf eine ähnliche Art zu verfahren, wie in den vorigen Exempeln verfahren wurde.

15. Es kommen zuweilen Exempel vor, wo man es mit Zeitbestimmungen zu thun hat, die nach dem Kalender angegeben sind: finden da vielleicht besondere Regeln Statt?

Es finden allerdings bei dergleichen Exempeln Schwierigkeiten Statt, die einer besondern Erwähnung verdienen. Denn es ist hierbei nöthig, die Angabe nach dem Kalender in einen arithmetischen Ausdruck umzuändern, oder umgekehrt, die arithmetische Bestimmung in der Sprache des Kalenders auszudrücken.

16. Wie läßt sich dies durch ein Beispiel deutlicher machen?

Es sey z. B. die Aufgabe gegeben: es ist jemand geboren im Jahr 1764 den 12. Sept. 5 Uhr des Morgens, und hat sein Alter gebracht auf 37 Jahr 5 Monate 6 Tage und 9 Stunden: Es fragt sich, wenn er gestorben ist?

Hier ist zu bemerken, daß man nicht in die Rechnung setzen kann:

1764 den 12. Sept. 5 Uhr des Morgens;

sondern man muß hieraus bestimmen, wie viele Jahre, Monate, Tage und Stunden seit Christi Geburt verflossen waren, als dieser Mensch geboren wurde. Nur aber ist klar, daß, wenn wir nach dem Kalender 1764 schreiben, wir im 1764sten Jahre stehen, folglich erst 1763 Jahre wirklich verflossen sind. Ferner ist der September der 9te Monat, folglich sind, wenn wir im September stehen, erst 8 Monate vorbei. Eben so sind, wenn wir den 12ten schreiben, erst 11 Tage verflossen; und 5 Uhr des Morgens endlich ist die 5te Stunde, weil der Tag im gemeinen Leben bei uns von Mitternacht an gerechnet werden muß. Hiernach entsteht folgender Ansatz:

1763 Jahre 8 Mon. 11 Tage 5 Stund.; hierzu
das Alter 37 = 5 = 26 = 9 = addirt

1800 J. 13 M. 37 T. 14 St.

oder richtiger

1801 J. 2 M. 9 T. 14 St.

So viele Jahre, Monate, Tage und Stunden waren also seit Christi Geburt verflossen, als dieser Mensch starb. Dies ist nach dem Kalender im Jahr 1802 den 10. März 2 Uhr Nachmittag. Denn wenn 1801 Jahre verflossen sind, so stehen wir im Jahre 1802; sind 2 Monate vorbei, so stehen wir im dritten, also im März; nach 9 Tagen folgt der 10te, und die 14te Stunde fällt 2 Uhr Nachmittag.

17. Was ist zu merken, wenn bei dergleichen Rechnungen Stunden auf Tage, Tage auf Monate, und Monate auf Jahre zurückzubringen sind?

Wenn Stunden in Tage zu verwandeln sind, so muß man in die Stunden mit 24 dividiren, weil 24 Stunden einen Tag ausmachen; sollen aber Tage in Monate verwandelt werden, so kann man nicht immer mit einerlei Zahl in die Tage dividiren, weil nicht alle Monate gleich viele Tage haben; sondern man muß Achtung geben, der wie vielste Monat im Jahre zu der Summe der Monate hinzuzusetzen ist, und darnach die erforderliche Menge von Tagen bestimmen. Z. B. in obigem Exempel sollte der 14te Monat zu der Summe der Monate hinzugesetzt werden; da aber ein Jahr nur 12 Monate hat, so ist der 14te Monat

so viel, als der 2te Monat des nächstfolgenden Jahres. Der 2te Monat aber ist der Februar, und da dieser nur 28 Tage hat, so dürfen auch nur so viel von der Summe der Tage für diesen Monat abgezogen werden. — Um endlich Monate auf Jahre zu bringen, dividirt man in die Zahl der Monate mit 12, weil 12 Monate ein Jahr ausmachen.

18. Wie werden ungleichbenannte Zahlen subtrahirt?

Die Subtraction ungleichbenannter Zahlen hat keine Schwierigkeit. Man reducirt sowohl, den Minuendus, als auch den Subtrahendus auf die kleinste vorkommende Gattung, subtrahirt dann wie bei unbenannten Zahlen, und den Rest verwandelt man wieder in Einheiten höherer Gattungen, wenn dergleichen in ihm liegen.

19. Wie läßt sich dies durch ein Beispiel deutlich machen?

Wenn man z. B. 19 Thlr. 23 Gr. 11 Pf. von 36 Thlr. 14 Gr. 2 Pf. abziehen soll; so verwandelt man sowohl den Subtrahendus, welches die erstere Zahl ist, als auch den Minuendus in Pfennige, weil dieses die kleinste Gattung ist, die in beiden vorkommen, und verrichte dann die Subtraction; nämlich:

10538 Pf. Minuendus
5759 = Subtrahendus.

4779 Pf. Rest.

Die Differenz der beiden gegebenen ungleichbenannten Zahlen ist also in Pfennige gefunden.

Diese Pfennige verwandelt man nun in Groschen und Thaler, so erhält man als Rest

16 Thlr. 14 Gr. 3 Pf.

20. Hat man nicht noch eine andere Art, ungleichbenannte Zahlen von einander zu subtrahiren?

Man hat eben so, wie bei der Addition noch eine zweite Art, ungleichbenannte Zahlen zu subtrahiren, die in den meisten Fällen der erstern bei weitem vorzuziehen ist.

21. Worin besteht diese zweite Art?

Sie bestehe in Folgendem:

Man schreibt den Subtrahendus so unter den Minuendus, daß die einzelnen Theile derselben gehörig unter einander zu stehen kommen, wie bei der Addition, nämlich Pfennige unter Pfennige, Groschen unter Groschen u. s. w. Dann fängt man bei der kleinsten Gattung an zu subtrahiren, und schreibe nach und nach zu den nächst folgenden Gattungen fort bis zur höchsten.

22. Wie läßt sich dieses Verfahren durch ein Beispiel deutlich machen?

Wenn man von 13 Ctr. 64 Pfd. 18 Loth abziehen soll 9 Ctr. 31 Pfd. 3 Loth: so schreibe man den Subtrahendus so unter den Minuendus, daß Lothe unter Lothe, Pfunde unter Pfunde, Ctr. unter Ctr. zu stehen kommen; nämlich:

Minuendus: 13 Ctr. 64 Pfd. 18 Loth.
Subtrahendus: 9 = 31 = 3 =
Rest: 4 Ctr. 33 Pfd. 15 Loth.

Dann fange man bei der niedrigsten Gattung,

den Lothen an, und subtrahirt die 3 Lothe im Subtrahenden von den 18 Lothen im Minuenden; es bleiben 15 Loth, die man unterschreibt. Dann verfährt man bei den Pfunden und Ctrn. auf eben dieselbe Art, und man erhält so den Rest.

23. Wie hat man sich zu verhalten, wenn von einer Gattung im Subtrahendus mehr Einheiten vorhanden sind, als im Minuendus?

Tritt der Fall ein, daß bei einer Gattung im Subtrahenden mehr Einheiten vorhanden sind, als im Minuenden, so daß man also bei dieser Gattung den Subtrahenden von dem Minuenden nicht subtrahiren könnte: so gehe man zur nächst folgenden höhern Gattung, borge hier eine Einheit, verwandle sie in Einheiten der niedern Gattung, addire hierzu die schon vorhandenen Einheiten in dieser Gattung, und subtrahire nun. Die Menge der nächst höhern Gattung, von welcher man eben eine Einheit geborgt hat, wird natürlich um 1 kleiner. Ganz auf ähnliche Art verfährt man, wenn im Minuenden von einer Gattung gar nichts da ist, im Subtrahenden aber diese Gattung vorhanden ist.

24. Wie läßt sich dies durch ein Beispiel deutlich machen?

Es soll z. B. von 356 Thlr. 6 Gr. 3 Pf. abgezogen werden 298 Thlr. 18 Gr. 6 Pf. Dies Exempel steht so:

			24		12
356	Thlr.	6	Gr.	3	Pf.
298	=	18	=	6	=
57	Thlr.	11	Gr.	9	Pf.

Da sich hier 6 Pfennige von 3 Pf. nicht abziehen lassen, so borgt man von der nächst höhern Gattung, von den Groschen, eine Einheit, und bemerkt dies durch einen Punct. Den geborgten Groschen macht man zu Pfennigen, so erhält man 12 Pf. Diese 12 Pf. addirt man zu den in Minuenden schon vorhandenen 3 Pf. giebt 15 Pf. und von diesen 15 Pf. zieht man die 6 Pf. im Subtrahendus ab, so erhält man 9 Pf., welche man hinschreibt. Nun geht man zu den Groschen. 18 Gr. lassen sich von 5 Gr. (denn von den 6 Gr., die eigentlich da stehen, ist einer geborgt worden, also bleiben noch 5 Gr.) wieder nicht abziehen. Man borgt daher von den Thalern einen Thaler, verwandelt ihn in Groschen, giebt 24 Groschen, addirt hierzu die im Minuenden vorhandenen 5 Gr., so erhält man 29 Gr. Von diesen zieht man nun die 18 Gr. des Subtrahenden ab; es bleiben 11 Gr. übrig, welche man hinschreibt. Zuletzt zieht man die Thaler ab, wobei man aber wohl merken muß, daß von den Thalern im Minuenden einer weggenommen worden ist.

Eben so wird man nun folgende Beispiele auch ohne Erklärung verstehen:

110 32

1) 17 Ctr. 33· Pfd. — Loth 3 Quentch.
12 = 69 = 14 = 2 =

5 Ctr. 73 Pfd. 18 Loth 1 Quentch.

Probe 12 Ctr. 33 Pfd. — Loth 3 Quentch.

15

2) 8 Schock 3 Mandeln 11 Ellen.

2 = 1 = 13 =

6 Schock 1 Mandel 13 Ellen.

Probe 8 Schock 3 Mandeln 11 Ellen.

25. Wenn es sich aber treffen sollte, daß von der nächst höhern Gattung, von welcher man eine Einheit borgen will, gar nichts da ist: wie verfährt man dann?

Sollte dieser Fall eintreten, daß nämlich von der nächst größern Gattung, von welcher man borgen will, selbst nichts vorhanden ist; so geht man zur folgenden höhern, und borgt da eine Einheit, verwandelt sie in Einheiten der nächst niedrigen Gattung, und schreibt diese in die Stelle dieser niedern Gattung. Dann nimmt man hiervon abermals eine Einheit hinweg, verwandelt sie in Einheiten der nächst niedrigen Gattung, welches nun die Gattung ist, von welcher im Subtrahenden mehr Einheiten vorhanden sind, als im Minuenden, addirt diese Einheiten zu den schon vorhandenen Einheiten dieser Gattung im Minuendus, und subtrahirt nun den Subtrahendus vom Minuendus.

26. Wie läßt sich dieses Verfahren durch ein Beispiel deutlich machen?

Sollte man z. B. 4 Thlr. 7 Gr. 6 Pf. von 19 Thlr. 4 Pf. subtrahiren, so setzt und rechnet man dies so:

	24·	12
19 Thlr.	— Gr.	4 Pf.
4 =	7 =	6 =
14 Thlr.	16 Gr.	10 Pf.

Erklärung: 6 Pf. von 4 Pf. lassen sich nicht abziehen; ich gehe daher zur nächstfolgenden höhern Gattung, zu den Groschen, und borge eine Einheit. Da aber gar keine Groschen im Minuenden vorhanden sind, und ich daher auch nichts borgen kann, so gehe ich zu der nun folgenden höhern Gattung, zu den Thalern, borge einen Thaler, und mache ihn zu Groschen, giebt 24 Gr., diese 24 Groschen schreibe ich in die Stelle der Groschen. Von ihnen nimmt man wieder 1 Gr. hinweg, verwandelt ihn in Pfennige, giebt 12 Pf.; und addirt diese 12 Pf. Zu den schon vorhandenen 4 Pf., giebt 16 Pf. Hiervon zieht man die 6 Pf. des Subtrahenden ab, bleiben 10 Pf. Nun geht man zu den Groschen, und sagt 7 Gr. von 23 Gr. (denn einen haben wir ja weggenommen, und in Pfennige verwandelt, welches durch den dabei stehenden Punct angedeutet wird) bleiben 16 Gr. Zuletzt subtrahirt man die Thaler, wobei man sich aber erinnern muß, daß von den Thalern im Minuendus einer weggenommen worden ist.

Man beachte noch folgendes Beispiel:

	110·	32·	4
11· Ctr.	— Pfd.	— Loth	1 Quentch.
9 =	105 =	9 =	3 =
1 Ctr.	4 Pfd.	22 Loth	2 Quentch.
Probe 11 Ctr.	— Pfd.	— Loth	1 Quentch.

27. Wie verfährt man, wenn der Minuendus nur aus einer einzigen Gattung von Größen, der Subtrahendus aber aus mehrern besteht?

Das Verfahren ist in diesem Falle mit dem so eben beschriebenen ein und dasselbe. Ein Paar Beispiele werden hinreichend seyn, das Verfahren zu zeigen. Soll man z. B. von 100 Thlr. abziehen 66 Thlr. 19 Gr. 2 Pf., so wird das Exempel folgendermaßen stehen:

	24°	12	
100° Thlr.	— Gr.	— Pf.	
66 =	19 =	2 =	
33 Thlr.	4 Gr.	10 Pf.	
Probe 100 Thlr.	— Gr.	— Pf.	

Eben so, wenn 17 Ctr. 3 Pfd. 14 Loth 2 Quentchen von 33 Ctr. zu subtrahren wäre:

	110°	32°	4	
33° Ctr.	— Pfd.	— Loth	— Quentch.	
17 =	3 =	14 =	2 =	
15 Ctr.	106 Pfd.	17 Loth	2 Quentch.	
Probe 33 Ctr.	— Pfd.	— Loth	— Quentch.	

28. Können bei der Subtraction nicht auch solche Rechnungen, wie bei der Addition, vorkommen, die es mit Zeitbestimmungen nach dem Kalender zu thun haben?

Allerdings kommen auch bei der Subtraction dergleichen Rechnungen vor. Es trifft gar nicht selten, daß man das Alter einer Person durch die Subtraction bestimmen soll, wobei man den Ausdruck des Kalenders in die arithmetische Sprache und umgekehrt übertragen muß.

29. Wie verfährt man bei dergleichen Aufgaben?

Man verfährt ganz eben so, wie oben bei den ähnlichen Aufgaben in der Addition. Z. B.: es ist jemand geboren im Jahr 1772 den 12. Mai 5 Uhr Nachmittags, und gestorben 1802 den 3. Febr. 8 Uhr Morgens: wie alt ist er geworden:

Man setzt dieses Exempel folgendermaßen:

1801°	J.	1°	M.	2°	T.	8	St.
1771 =		4		11 =		17 =	
„„29	J.	8	M.	21	T.	15	St.

Probe 1801 J. 1 M. 2 T. 8 St.

Vierzehntes Kapitel.

Multiplication und Division ungleichbenannter Zahlen.

1. Können ungleichbenannte Zahlen mit einander multiplicirt werden?

Nein! Denn benannte Zahlen können überhaupt nicht mit benannten Zahlen multiplicirt werden (13, 3 . 4). Wohl aber kann eine ungleichbenannte Zahl durch eine unbenannte Zahl multiplicirt werden.

2. Auf welche Arten kann dies geschehen?

Die Art und Weise, wie man eine ungleichbenannte Zahl mit einer unbenannten multiplicirt, ist folgende: man multiplicirt mit der unbenannten Zahl jeden Theil des Multiplicanden, so daß man von den niedrigern Gattungen anfängt, und nach und nach zu den höhern fortgeht. Die nic-

drigern Einheiten verwandele man nöthigenfalls in nächst höhere, und addire diese zum Producte der nächst höhern. Sollten noch niedrigere Einheiten übrig bleiben, so schreibt man dieselben unter ihre gehörigen Einheiten.

3. Wie läßt sich dies durch ein Beispiel deutlich machen?

Wenn z. B. verlangt wird, 8 Ctr. 36 Pfd. 14 Loth mit 9 zu multipliciren, so multiplicirt man mit dieser Zahl jeden Theil der benannten, nämlich erst die Lothe, dann die Pfunde, und endlich die Ctr., auf folgende Art:

8 Ctr. 36 Pfd. 14 Loth
9
72 Ctr. 324 Pfd. 126 Loth.

Da aber in den 126 Lothen, die man durch die Multiplication der vorhandenen 14 Lothe mit 9 erhielt, Pfunde stecken, so verwandelt man sie in Pfunde. Man erhält 3 Pfd. 30 Loth. Die 30 Loth schreibt man unter die Lothe, die 3 Pfd. aber addirt man zu dem Producte aus 9 in die vorhandenen 36 Pfd., nämlich zu 324 Pfd. Dies giebt 327 Pfd., welche 2 Ctr. 107 Pfd. ausmachen. Die 107 Pfd. schreibt man unter die Pfunde; die 2 Ctr. aber addirt man zu den 72 Ctr., als dem Producte aus 9 in die vorhandenen 8 Ctr.; so erhält man 74 Ctr., das Exempel würde hiernach vollständig so stehen:

8 Ctr. 36 Pfd. 14 Loth.

9

Product: 72 Ctr. 324 Pfd. 32 | 126 Loth | 3 Pfd.

2 3 96

74 C. 110 | 327 | 2 Ctr. 30 Loth

220

107 Pfd.

richtiger nun: 74 Ctr. 107 Pfd. 30 Loth.

Man beachte noch folgende Beispiele:

1) 12 Thlr. 13 Gr. 7 Pf.

6

72 Thlr. 78 Gr. 42 Pf.

richtiger 75 Thlr. 9 Gr. 6 Pf.

2) 15 Malter 9 Scheffel 3 Viertel 1 Metze.

16

255 Malter 7 Scheffel — Viertel — Metze.

3) 80 Schock 3 Mandel 11 Ellen.

113

9144 Schock — Mandel 11 Ellen.

4) 9 Thlr. — Gr. 1 Pf.

18

162 Thlr. 1 Gr. 6 Pf.

4. Es ist früher gesagt worden, daß man eine benannte Zahl durch eine benannte Zahl nicht multipliciren könne: demungeachtet kommen Aufgaben vor, wo dies nothwendig zu seyn scheint: was hat es damit für eine Bewandniß?

Allerdings kommen Aufgaben vor, wo es scheint, als ob man bei Auflösung derselben zwei

benannte Zahlen, und zwar noch dazu oft zwei ungleichbenannte Zahlen, mit einander multiplici=ren müßte. Wenn z. B. gefragt wird: wie viel 9 Ellen Tuch kosten, die Elle zu 2 Thlr. 17 Gr. 9 Pf., so könnte es allerdings scheinen, als ob man die 2 Thlr. 17 Gr. 9 Pf. mit 9 Ellen mul=tipliciren müßte. Allein, wenn gleich in der Auf=gabe 9 Ellen gegeben sind, so braucht man in der Rechnung doch nur die unbenannte Zahl 9: man muß nämlich den Preis von 1 Elle so vielmal nehmen, als Ellen gegeben sind; also hier 9 mal. Das erwähnte Exempel würde daher so stehen:

2 Thlr. 17 Gr. 9 Pf.
9
24 Thlr. 15 Gr. 9 Pf.

5. Findet bei der Division etwas Aehnliches Statt, wie bei der Multiplication, daß nämlich eine benannte Zahl nur durch eine unbenannte di=vidirt werden kann?

Nein, bei der Division mit benannten Zahlen findet dies nicht Statt. Der Divisor kann sowohl eine unbenannte, als auch eine benannte Zahl seyn. Daß der Dividendus in beiden Fällen eine benannte Zahl seyn muß, versteht sich von selbst.

6. Wie muß man sich die Division denken, wenn der Divisor eine unbenannte Zahl ist?

Man muß sie sich dann als ein Eintheilen des Dividendus in eine gewisse Anzahl gleicher Theile denken (vergl. 9, 32). Wird z. B. verlangt: 3 Thlr. 12 Gr. mit 4 zu dividiren, so verlangt

man damit, den Dividendus 3 Thlr. 12 Gr. in 4 gleiche Theile zu theilen.

7. Was für eine Zahl wird also der Quotient allemal seyn müssen, wenn der Divisor eine unbenannte Zahl ist?

Der Quotient muß in diesem Falle jedesmal eine benannte Zahl seyn; und er erhält stets den Namen, den der Dividendus hat.

8. Wie muß man sich die Division denken, wenn der Divisor eine benannte Zahl ist?

Wenn der Divisor eine benannte Zahl ist, so muß man sich die Division denken, als das Verfahren zu finden, wie oft eine gegebene Zahl (der Divisor) in einer andern gegebenen Zahl (dem Dividenden) enthalten ist (vergl. 9, 10.). Sollte man z. B. 4 Thlr. 8 Gr. 3 Pf. durch 1 Thlr. 2 Gr. 9 Pf. dividiren, so hieße das nichts anders als: man soll untersuchen, wie oft die letztere Zahl in der erstern enthalten. Hieraus geht hervor, daß die beiden Zahlen gleichartige Zahlen seyn müssen. Z. B. 4 Ctr. 9 Pfd. 3 Loth kann man nicht durch 1 Thlr. 2 Gr. 3 Pf. dividiren.

9. Was muß in diesem Falle der Quotient für eine Zahl seyn?

In diesem Falle, wenn nämlich der Divisor auch eine benannte Zahl ist, muß der Quotient jedesmal eine unbenannte Zahl seyn, weil er ja anzeigt, wie viel mal der Divisor im Dividenden enthalten ist.

10. Wie verrichtet man die Division, wenn der Divisor eine unbenannte Zahl ist?

Das Verfahren ist dann folgendes: Man bringe den Dividendus auf die kleinste in ihm vorhandene Gattung, und dividire dann mit dem Divisor, so erhält man den Quotienten in der kleinsten Gattung ausgedrückt. Diese verwandelt man nöthigenfalls in größere Gattungen.

11. Wie läßt sich dies Verfahren durch ein Beispiel erläutern?

Wenn z. B. 20 Thlr. 3 Gr. 4 Pf. unter 4 Personen gleich vertheilt werden sollen, und man will wissen, wie viel jede erhält: so muß man, wie bekannt, mit 4 in 20 Thlr. 3 Gr. 4 Pf. dividiren. Um dies zu bewerkstelligen, verwandele man die 20 Thlr. 3 Gr. 4 Pf. nach früheren Regeln in Pfennige, giebt 5800 Pfennige. Diese Summe von Pfennigen wird mit 4 dividirt, so erhält man zum Quotienten 1450 Pf., als so viel jede Person erhält. Um nun zu sehen, wie viel Thaler und Groschen dies sind, verwandle man diese Pfennige wieder nach bekannten Regeln in Einheiten höherer Gattungen, so wird man endlich als Quotienten 5 Thlr. 10 Pf. erhalten. Das ganze Exempel würde so stehen:

20 Thlr. 3 Gr. 4 Pf. : 4.

24

480 Gr.
3 Gr.

483 Gr.
12

966
483

5796

4 | 12 | 24

4|5800 Pf. | 1450 Pf. | 120 Gr. | 5 Thlr.

4 | 12 | 120

18 | „25 | „„„„
16 | 24

„20 | „10 Pf.
20

„„0

Folgendes Beispiel wird nun ohne Erklärung vollständig seyn:

13 Ctr. 48 Pfd. 3 Loth 1 Quentch. : 96

110

13

13

1430

48

1478 Pfd.

32

2956

4434

47296

3

47299 Loth

4

189196

1

4 32

96|189197 Qutch.|1970 Qutch.|492 Loth|15 Pfd.

96 16 32

931 ,,37 172

864 36 160

,,679 ,,10 12 Loth.

672 8

,,,,77 Rest. 2 Qutch.

12. Was hat es in diesem letzten Beispiele mit dem übrig bleibenden Reste 77 für eine Bewandniß?

Dieser Rest zeigt an, daß, wenn sich 96 Personen in 13 Ctr. 48 Pfd. 3 Loth 1 Qutch. theilen, auf jede noch etwas mehr als 1970 Qutch., aber doch weniger als 1971 Qutch. kommen. Wenn man die Probe (nach 10, 12.) macht, so muß die-

fer Rest 77 zu dem Producte aus dem Divisor in die Quentchen addirt werden, wenn der Dividendus wieder zum Vorschein kommen soll. Z. B.

Probe.

15 Pfd. 12 Loth 2 Qutch. Quotient.
96 Divisor.

1440 Pfd. 1152 Loth 192 Qutch.
77 Rest addirt

269 Qutch.

richtiger 13 Ctr. 48 Pfd. 3 Loth 1 Qutch.

13. Hat man außer diesem bis jetzt beschriebenem Verfahren nicht noch ein anderes, nach welchem man eine benannte Zahl durch eine unbenannte dividiren kann?

Es giebt allerdings auch bei der Division noch ein anderes, das leichter zum Ziele führt, bei dem man aber viele Aufmerksamkeit anwenden muß.

14. Welches ist dieses Verfahren?

Es ist folgendes: Man dividirt alle Theile der gegebenen benannten Zahl durch den unbenannten Divisor einzeln; so daß man bei der höchsten Gattung anfängt, und nach und nach zu den niedrigern fortgeht. Bleibt irgendwo ein Rest, so verwandle man ihn nach den bekannten Regeln in Einheiten der nächst niedrigen Gattung, addire dazu die schon vorhandenen Einheiten dieser Gattung, und dividire alsdann. Sollte es vorkommen, daß man mit dem Divisor in irgend einen Theil des Dividenden nicht dividiren könnte, weil dieser Theil kleiner wäre, als der Divisor; so verwandelt man diesen Theil in Einheiten der nächst

niedrigern Gattung, addirt dazu die schon vorhandenen Einheiten dieser Gattung, und verrichte dann die Division.

15. Wie läßt sich dies durch ein Beispiel anschaulich machen?

Es sey z. B. gegeben:

25 Thlr. 13 Gr. 4 Pf. : 3.

Statt daß wir nach dem vorigen Verfahren den Dividendus in Pfennige verwandelten und dann mit dem Divisor dividirten: so wird nun nach dem zweiten Verfahren jeder einzelne Theil des Dividendus mit dem Divisor 3 auf folgende Art dividirt:

25 Thlr. 13 Gr. 6 Pf. : 3.

3 | 25 Thlr. | 8 Thlr.
24
„1 Rest; dieser wird zu Groschen gemacht.
24
24
13 die vorhandenen Groschen addirt
3 | 37 | 12 Gr.
3
„7
6
1 Rest; dieser wird zu Pfennigen gemacht.
12
12
6 die vorhandenen Pfennige addirt.
3 | 18 Pf. | 6 Pf.
18
„„

Der Quotient heißt also

8 Thlr. 12 Gr. 6 Pf.

Man beachte noch folgende 2 Beispiele:

1) 15 Malter 6 Scheffel 3 Viertel 2 Metzen : 10

10 | 15 M. | 1 M.
10
5 Rest zu Scheffeln gemacht
10
50
6 die vorhandenen Scheffel addirt

10 | 56 Sch. | 5 Scheffel
50
„6 Rest zu Vierteln gemacht
4
24
3 die vorhandenen Viertel addirt

10 | 27 Viertel | 2 Viertel
20
„7 Rest zu Metzen gemacht
4
28
2 die vorhandenen Metzen addirt

10 | 30 | 3 Metzen.
30
„„

Probe: 1 Malt. 5 Schff. 2 Viert. 3 Mtz. Quotient } multi-
10 = Divisor } plicirt

15 M. 6 Sch. 3 V. 2 Mtz. Dividendus.

2) 104 Ctr. — Pfd. — Loth 2 Qutch. : 24.

24 | 104 Ctr. | 4 Ctr.
96

„8 Rest zu Pfd. gemacht.

116

24 | 880 Pfd. | 36 Pfd.
72

160

144

„16 Rest zu Lothen gemacht.

32

32

48

24 | 512 Loth | 21 Loth.
48

„32

24

„8 Rest zu Quentchen gemacht

4

32

2 die vorhandenen Quentchen addirt

24 | 34 | 1 Qutch.
24

10 Rest.

16. Wie verfährt man bei der Division benannter Zahlen, wenn der Divisor auch eine benannte Zahl ist?

Das Verfahren ist dann ganz einfach. Man bringt nämlich sowohl den Dividendus als den Divisor auf die kleinste Gattung, welche vorhanden ist, und dividirt dann, als wenn es unbenannte

Zahlen wären. Der Quotient ist jedesmal unbenannt.

17. Wie läßt sich dies durch ein Beispiel deutlich machen?

Wenn gegeben wäre: 37 Thlr. 16 Gr. 8 Pf. : 2 Thlr. 8 Gr. 8 Pf.; oder mit andern Worten: wenn man untersuchen sollte, wie vielmal die letzte in der ersten enthalten sey: so bringt man sowohl den Dividendus, als auch den Divisor auf Pfennige und dividirt alsdann; nämlich:

37 Thlr. 16 Gr. 8 Pf. : 2 Thlr. 8 Gr. 8 Pf.

24 — 24

148 — 48

74 — 8

888 — 56 Gr.

16 — 12

904 Gr. — 112

12 — 56

1808 — 672

904 — 8

10848 — 680 Pf.

8

680|10856 Pf. | 15 Quotient

680

4056

3400

,,656 Rest.

Der Divisor liegt also im Dividendus mehr als 15 mal.

Folgendes Beispiel wird eben so verständlich seyn:

104 Ctr. — Pfd. 3 Loth : 9 Ctr. — Pfd. — Loth 2 Q.

110		110	
104		990	Pfd.
104		32	
11440	Pfd.	1980	
32		297	
2288		31680	Loth
3432		4	
366080		126720	
3		2	
366083	Loth.	126722	Qutch.
4			
126722 | 1464332	Qutch. |	11	Quotient
126722			
197112			
126722			
„70390	Rest.		

Probe:

126722 Qutch. — Divisor } multiplicirt
11 Quotient }

126722	
126722	
1393942	
70390	Rest addirt
1464312	Qutch. Dividendus

oder

104 Ctr. — Pfd. 3 Loth.

Anm. Daß der Dividendus und Divisor auf gleiche Namen gebracht werden müssen, ist durchaus nothwendig.

18. Was läßt sich oft bei der Multiplication mit benannten Zahlen, und auch bei der Division, wenn der Divisor unbenannt ist, mit Vortheil anwenden?

Das Zerfällen der Zahlen in Factoren. Man zerfällt nämlich den Multiplicator oder Divisor, wenn er aus mehr als 1 Ziffer besteht, in 2 oder auch mehrere Factoren, und multiplicirt oder dividirt der Reihe nach mit diesen Factoren. Ein Paar Beispiele werden dies deutlich machen:

1) 8 Thlr. 3 Gr. 9 Pf. × 24

		3	
24 Thlr.	11 Gr.	3 Pf.	
		8	
195 Thlr.	18 Gr.	— Pf.	

24 wird zerfällt in 3 . 8

Der Multiplicator 24 wurde zerfällt in 3 . 8; und dann der Multiplicandus zuerst mit dem einen Factor 3, und das so erhaltene Product mit dem andern Factor multiplicirt.

2) 48 Thlr. 8 Gr. 8 Pf. : 36.

36 zerfälle man in 4.9.

4 |	48 Thlr. |	12 Thlr.
	48	
4 |	,,,,8 Gr. |	2 Gr.
	8	
4,, |	8 Pf. |	2 Pf.
	8	
	,,	

12 Thlr. 2 Gr. 2 Pf.
9 | 12 Thlr. | 1 Thlr.
9
3
24
72
2
9 | 74 | 8 Gr.
72
„2
12
24
2
9 | 26 | 2 Pf.
18
„8

Es wurde hier der Divisor 36 in 4 . 9 zerfällt; und der Dividendus zuerst mit dem ersten Factor 4; und der so erhaltene Quotient 12 Thlr. 2 Gr. 2 Pf. mit dem zweiten Factor 9 dividirt. Daß das Zerfällen der Zahlen in ihre Factoren bei der Division keinen großen Vortheil gewährt, kann man schon an diesem Beispiele sehen. Der Fälle, wo es auch bei der Division vortheilhaft angewendet werden kann, sind äußerst wenige; und man thut am besten, nach der gewöhnlichen Art zu verfahren. Z. B. bei dem vorigen Exempel.

48 Thlr. 8 Gr. 8 Pf. : 36.

36 | 48 Thlr. | 1 Thlr.
36
12
24
48
24
288
8
36 | 296 Gr. | 8 Gr.
288
8
12
96
8
36 | 104 Pf. | 2 Pf.
72
32

Bei der Multiplication läßt sich aber jenes Zerfällen in sehr vielen Fällen mit entschiedenem Vortheil anwenden; und man kann sich dadurch die Rechnung gar sehr erleichtern. Deswegen sollen noch einige Beispiele hier stehen:

1) 36 Ctr. 15 Pfd. 18 Loth × 192.

8 — 192 wird zerfällt in

289 Ctr. 14 Pfd. 16 Loth — 8 . 4 . 6 .

4

1156 Ctr. 58 Pfd. — Loth.

6

6939 Ctr. 18 Pfd. — Loth.

2) 8 Malter 3 Scheffel 2 Viert. 1 Metze × 1296.

			2	1296 wird zer=
16 M.	7 Sch.	— V.	2 Mtz.	fällt in :
			6	2. 6. 4. 3. 9.
100 M.	2 Sch.	3 V.	— Mtz.	
			4	
401 M.	1 Sch.	— V.	— Mtz.	
			3	
1203 M.	3 Sch.	— V.	— Mtz.	
			9	
10830 M.	6 Sch.	— V.	— Mtz.	

3) 113 Thlr. 12 Gr. 3 Pf. × 504.

			8	504 zerfälle man in
908 Thlr.	2 Gr.	— Pf.		8 . 7 . 9.
			7	
6356 Thlr.	14 Gr.	— Pf.		
			9	
57209 Thlr.	6 Gr.	— Pf.		

Funfzehntes Kapitel.
Von vermischten Aufgaben.

1. Was versteht man unter vermischten Aufgaben?

Man versteht darunter solche Aufgaben, die sich zwar durch die 4 Rechnungsarten mit benannten Zahlen auflösen lassen, aber nicht zu Einer Klasse derselben gehören, sondern mehrere dieser Rechnungsarten zu ihrer Auflösung.

2. Bedarf es zu ihrer Auflösung besonderer Vorschriften?

Nein, dieser bedarf es gerade nicht; man muß aber bei dergleichen Aufgaben sehr aufmerksam seyn,

und wohl überlegen, welche von den vier Rechnungsarten und in welcher Ordnung man sie anwenden muß.

3. Welches sind dergleichen Aufgaben, und welches Verfahren muß man bei ihrer Auflösung anwenden?

Dergleichen Exempel sind z. B.:

1) Ein Oekonom erntet von einem Felde 72 Malter Korn, wovon ihm die Saat 40 Thlr. 12 Gr.; die Bestimmung 17 Thlr. 15 Gr.; das Einernten 10 Thlr. 18 Gr., und das Dreschen 5 Thlr. 16 Gr. gekostet hat. Er verkauft darauf das Malter zu 5 Thlr. 12 Gr. Wie viel behält er nach Abzug seiner Kosten übrig?

Hier müssen zuerst die Kosten der Saat, der Bestellung, des Einerntens und Dreschens zusammen addirt werden; dann muß man die gesammte Einnahme ausrechnen, indem man den Preis von einem Malter, nämlich 5 Thlr. 12 Gr., mit der Anzahl der Malter, d. i. 72, multiplicirt; endlich muß man die Summe der Kosten von der Einnahme abziehen, so findet man, was ihm noch übrig bleibt, nämlich: 321 Thlr. 12 Gr.

2) Ein Pachter hat 12 Ochsen und 3 Pferde, und braucht für einen Ochsen wöchentlich 3 Metzen, und für ein Pferd wöchentlich 2 Viertel 1 Metze Frucht. Nun hat er einen Vorrath von 1 Malter 9 Scheffel 3 Viertel 1 Metze: wie lange wird er damit reichen?

Zuerst muß gesucht werden, wie viel Frucht

er wöchentlich für Ochsen und Pferde zusammen braucht. Man muß also 3 Metzen mit 12, und 2 Viertel 1 Metze mit 3 multipliciren, und beide Producte zusammen addiren. Alsdann muß man mit dieser Summe in den Vorrath von 1 Malter 9 Scheffel 3 Viertel 1 Metze dividiren; so zeigt der Quotient an, wie lange er mit seinem Vorrathe reicht.

3) Ein Hausvater kauft einen Ochsen für 8 Karolin; er mästet ihn eine Zeitlang, und das Futter kostet ihm noch 7 Thlr. 4 Gr. 2 Pf.; für's Schlachten bezahlt er 18 Gr; die Abgaben betragen 2 Thlr. 4 Gr. 6 Pf. dagegen bekommt er für die Haut 5 Thlr. 8 Gr.; für das Pfund Talg 2 Gr. 4 Pf., und der Ochse hat 65 Pfd. Talg; für das Eingeweide 1 Thlr. 20 Gr. Nun wiegt der Ochse an reinem Fleische 630 Pfd.: wie hoch kommt ihm das Pfund Fleisch?

Bei diesem Exempel müssen alle 4 Rechnungsarten angewendet werden: 1) addirt müssen werden: der Preiß des Ochsens, die Kosten des Futters und des Schlachtens, und die Abgaben, um zu sehen, was der Ochse überhaupt gekostet hat; 2) multiplicirt muß der Preiß von 1 Pfd. Talg mit der Anzahl der Pfunde werden, um zu finden, wie viel der Talg gekostet hat; 3) der Preiß der Haut, des Talgs und der Eingeweide müssen ebenfalls addirt werden; 4) subtrahirt muß nun die Einnahme aus der Haut, dem Talge

und den Eingeweiden werden von dem, was der Ochse überhaupt gekostet hat. 5) Was nach der Subtraction übrig bleibt, wird durch das Gewicht des reinen Fleisches, d. i. durch 630, dividirt, so findet man den Preiß von einem Pfunde Fleisch.

Drittes Hauptstück.

Von den Brüchen

Sechzehntes Kapitel.

Von den Brüchen überhaupt, ihrer Erklärung, Bezeichnung und Eintheilung.

1. Was ist ein Bruch?

Ein Bruch, oder eine gebrochene Zahl ist eine solche Zahl, die einen oder mehrere Theile eines Ganzen anzeigt. Jeder Bruch wird durch 2 Zahlen bezeichnet, von denen die eine der Zähler, die andere der Nenner heißt.

2. Was ist der Nenner?

Der Nenner ist diejenige Zahl, welche anzeigt, in wie viel gleiche Theile das Ganze getheilt werden soll, und heißt deswegen Nenner, weil er dem Bruche den Namen giebt.

3. Was ist der Zähler?

Der Zähler ist diejenige Zahl, welche angiebt, wie viel solcher Theile genommen werden sollen.

Er wird über einen Querstrich geschrieben, der Nenner aber darunter.

4. Wie lassen sich diese Begriffe durch ein Beispiel deutlich machen?

Wenn z. B. gesagt wird: zwei drittheil Thaler, so heißt dies, man soll den dritten Theil eines Thalers zweimal nehmen; oder, man soll einen in 3 gleiche Theile theilen und 2 von diesen Theilen nehmen. Zwei drittheil Thaler ist also eine gebrochene Zahl oder ein Bruch, und wird so bezeichnet: $\frac{2}{3}$ Thaler. 2 ist der Zähler, 3 der Nenner. Der Zähler ist die eigentliche Zahl eines Bruchs, der Nenner aber blos der Name. Der vorige Bruch ist ein benannter Bruch, weil die Einheit einen Namen hat; drei Viertel aber ist ein unbenannter Bruch, da seine Einheit keinen Namen hat, und er wird bezeichnet $\frac{3}{4}$; 3 ist der Zähler, 4 der Nenner.

5. Als was kann man jeden Bruch ansehen?

Jeder Bruch läßt sich als eine unverrichtete Division, oder als ein Quotient ansehen, dessen Dividendus der Zähler, und dessen Divisor der Nenner des Bruchs ist.

6. Wie läßt sich dies beweisen?

Wenn man z. B. den Bruch $\frac{5}{8}$ hat, so kann man auch untersuchen, wie viel mal 8 (als Divisor) in 5 (als Dividenden) enthalten ist. Offenbar aber steckt 8 auch nicht ein einzigmal in 5; vielmehr sind von den in 8 enthaltenen acht Einheiten, nur 5 ein einzigmal in 5 enthalten, d. h. 8 steckt in 5 nur $\frac{5}{8}$ mal; wo also $\frac{5}{8}$ der Quotient

ist. Aus diesem Grunde haben auch die Brüche und die Quotienten ganz einerlei Bezeichnung, und man kann jede Division als einen Bruch betrachten, und umgekehrt.

7. Was folgt hieraus für den Rest, der zuweilen bei einer Division bleibt?

Es folgt daraus, daß dieser Rest der Zähler eines Bruches ist, dessen Nenner der Divisor ist. Dieser Bruch muß also noch zum Quotienten hinzugefügt werden, um diesen vollständig zu erhalten. Z. B. wenn 25 durch 4 dividirt wird, so erhält man zum Quotienten 6; es bleibt aber noch 1 als Rest übrig. Diese 1 sieht man als Zähler eines Bruches an, schreibt den Divisor als Nenner unter ihn, und fügt diesen Bruch $\frac{1}{4}$ noch zum Quotienten 6, so daß dieser nun vollständig heißt: $6\frac{1}{4}$; oder mit andern Worten: 4 liegt in 25 6 mal und noch $\frac{1}{4}$ mal, als $6\frac{1}{4}$ mal. Wenn eine ganze Zahl durch eine ganze Zahl, die größer ist, als sie, dividirt wird, so wird es ein Bruch; z. B. 8 : 11 = (gleich) $\frac{8}{11}$.

8. Wie werden die Brüche eingetheilt?

Die Brüche werden eingetheilt

1) in eigentliche und uneigentliche;
2) in echte und unechte;
3) in Brüche von einerlei Benennung, und in Brüche von verschiedener Benennung;
4) in einfache und zusammengesetzte Brüche.

9. Was ist ein uneigentlicher Bruch?

Ein uneigentlicher Bruch ist ein solcher, wo der Zähler und Nenner einander gleich sind, wie

z. B. in den Brüchen $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{6}{6}$ u. s. w.; oder wo doch der Zähler ein Vielfaches vom Nenner ist, wie $\frac{16}{4}$; $\frac{12}{2}$ u. s. w. Solche uneigentliche Brüche sind nur andere Ausdrücke für ganze Zahlen; denn $\frac{4}{4}$, d. h. den 4ten Theil der Einheit viermal genommen, ist ja die Einheit selbst, oder 1. Eben so ist $\frac{16}{4}$ die ganze Zahl 4.

10. Wie kann man den Werth eines uneigentlichen Bruches finden?

Den Werth eines uneigentlichen Bruches findet man, wenn man den Zähler durch den Nenner dividirt. Z. B. wenn man den Werth des Bruches $\frac{12}{3}$ finden will, so dividirt man den Zähler 12 durch den Nenner 3; man erhält 4; dies ist der Werth des uneigentlichen Bruches $\frac{12}{3}$; oder mit andern Worten, dieser Bruch ist nichts anders, als die ganze Zahl 4, und in der Form eines Bruches dargestellt.

11. Was ist ein eigentlicher Bruch?

Ein eigentlicher Bruch ist ein solcher, wo Zähler und Nenner einander nicht gleich sind, oder wo der Zähler kein Vielfaches ist vom Nenner; wie z. B. $\frac{3}{4}$, $\frac{15}{9}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{16}{7}$ u. s. w. Man unterscheidet bei den eigentlichen Brüchen wieder echte und unechte.

12. Was ist ein echter Bruch?

Ein echter Bruch ist ein solcher, wo der Zähler kleiner ist, als der Nenner, der also kleiner ist, als die Einheit; wie z. B. $\frac{2}{3}$, $\frac{9}{11}$ u. s. w.

13. Was ist ein unechter Bruch?

Ein unechter Bruch oder ein Afterbruch ist

ein solcher, wo der Zähler größer ist, als der Nenner, der also größer ist, als die Einheit. Z. B. $\frac{4}{3}$, $\frac{9}{5}$ u. s. w. Wenn man den Zähler eines solchen unechten Bruches durch den Nenner dividirt, so erhält man den Werth dieses Bruches, der allemal eine gemischte Zahl ist. Z. B. der Werth von $\frac{9}{5}$ ist $1\frac{4}{5}$.

14. Was versteht man unter Brüchen von einerlei Benennung?

Man versteht darunter solche Brüche, deren Nenner gleich ist, oder: deren Nenner ein und dieselbe Zahl ist. Z. B. $\frac{4}{11}$, $\frac{5}{11}$, $\frac{7}{11}$, $\frac{8}{11}$ sind Brüche von einerlei Benennung; denn sie haben alle den Nenner 11.

15. Was versteht man unter Brüchen von verschiedener Benennung?

Unter Brüchen von verschiedener Benennung versteht man solche Brüche, deren Nenner alle von einander verschieden sind; so sind $\frac{3}{4}$ und $\frac{4}{5}$ Brüche von verschiedener Benennung; eben so: $\frac{8}{9}$, $\frac{3}{11}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{7}$ u. s. w.

16. Was sind einfache Brüche?

Einfache Brüche sind solche, wo sowohl der Zähler, als der Nenner ganze Zahlen sind. Z. B. $\frac{2}{3}$ u. s. w.

17. Was sind zusammengesetzte Brüche?

Zusammengesetzte Brüche (gebrochene Brüche, Doppelbrüche) sind solche, wo der Zähler, oder der Nenner, oder beide zugleich, wieder Brüche, oder auch gemischte Zahlen (2, 2. 3) sind z. B.

$$\frac{\frac{2}{3}}{4};\quad \frac{\frac{1}{2}}{\frac{4}{5}};\quad \frac{3}{\frac{4}{7}};\quad \frac{2\frac{1}{2}}{3};\quad \frac{3\frac{1}{5}}{4\frac{3}{11}}$$ u. s. w.

Siebzehntes Kapitel.

Vom Werthe der Brüche.

1. Wie kann man die Brüche ihrem Werthe nach mit einander vergleichen?

Dies kann mit Hülfe der Zähler und Nenner der Brüche geschehen.

2. Nach welcher Regel kann man beurtheilen, ob ein Bruch größer oder kleiner ist, als ein anderer?

Dies kann man nach folgender Regel:

Wenn zwei Brüche einerlei Nenner haben, so ist derjenige der größere, dessen Zähler größer ist. Haben aber die Brüche gleiche Zähler, so ist derjenige der größere, welcher den kleinsten Nenner hat. Z. B. von den Brüchen $\frac{2}{5}$ und $\frac{3}{5}$ ist, da ihre Nenner gleich sind, $\frac{3}{5}$ der größere, da sein Zähler größer ist, als der Zähler des andern Bruchs. Hingegen ist von den Brüchen $\frac{3}{5}$ und $\frac{3}{4}$, die gleiche Zähler haben, $\frac{3}{4}$ der größere, weil sein Nenner kleiner ist, als der Nenner des andern Bruchs.

3. Worauf beruht die Richtigkeit dieser Regel?

Die Richtigkeit dieser Regel ist klar; denn im ersten Falle ist die Einheit in 5 Theile getheilt, und bei dem ersten Bruche $\frac{2}{5}$, zweimal, bei dem zweiten aber $\frac{3}{5}$, 3mal genommen; natürlich muß dieser letztere größer seyn, als der erstere, da bei ihm ein und dieselbe Größe, nämlich der 5te Theil der Einheit, mehrmal genommen ist, als bei jenem. Im zweiten Falle aber, wenn nämlich Brüche, wie z. B. $\frac{3}{5}$ und $\frac{3}{4}$ vorliegen, die gleiche

Zähler, aber ungleiche Nenner haben, ist in dem ersten Bruche $\frac{3}{5}$, die Einheit in 5 Theile getheilt, bei dem zweiten aber $\frac{3}{4}$ in weniger Theile, nämlich in 4. Die letztern Theile müssen natürlich größer seyn, als die erstern, und da in beiden Brüchen eine gleiche Anzahl von Theilen genommen ist, so ist es begreiflich, daß der Bruch $\frac{3}{4}$ größer ist, als $\frac{3}{5}$.

4. Woran kann man aber erkennen, welcher von 2 Brüchen, deren Zähler und Nenner verschieden sind, der größere sey?

Dies können wir jetzt noch nicht beurtheilen. Wir müßten dann die Brüche auf einerlei Benennung bringen, was erst in der Folge gelehrt werden wird.

5. Wie kann der Werth eines Bruches vermehrt werden?

Dies kann auf zweierlei Art geschehen:

1) indem man den Zähler des Bruches vermehrt, und den Nenner ungeändert läßt; oder

2) indem man den Nenner desselben vermindert, und den Zähler ungeändert läßt.

6. Woraus geht die Richtigkeit dieser Regel hervor?

Sie geht hervor aus dem Begriffe des Zählers und Nenners. Im ersten Falle nämlich wird die Beschaffenheit der Theile nicht geändert, sondern nur die Menge der Theile vermehrt; also muß der Werth des Bruches wachsen. Im zweiten Falle aber bleibt die Anzahl der Theile unverändert; aber ihre Beschaffenheit ändert sich, sie

werden nämlich durch die Verminderung des Nenners kleiner; also wird auch der Werth des Bruches vermehrt.

7. Wie läßt sich das Obige durch ein Beispiel deutlich machen?

Wenn man z. B. den Zähler eines Bruches, etwa $\frac{2}{9}$, mit 3 multiplicirt, und den Nenner unverändert läßt, so wird der Bruch so vielmal größer, als die Zahl 3 Einheiten hat, also 3 mal. $\frac{2 \cdot 3}{9}$ d. i. $\frac{6}{9}$. Der letztere Bruch ist offenbar dreimal größer, als $\frac{2}{9}$. Eben so könnte man den vorliegenden Bruch dreimal größer machen, wenn man seinen Nenner mit drei dividirte, und den Zähler ungeändert ließe; nämlich $\frac{2}{9:3}$ d. i. $\frac{2}{3}$ der letztere Bruch ist offenbar dreimal größer als der Bruch $\frac{2}{9}$; denn die Theile sind bei ihm dreimal größer als die Theile bei diesem, und die Anzahl derselben ist in beiden gleich.

8. Wie kann der Werth eines Bruches verkleinert werden?

Dies kann geschehen, wenn man

1) seinen Zähler vermindert, und den Nenner unverändert läßt; oder

2) seinen Nenner vermehrt, und den Zähler unverändert läßt.

9. Woraus geht die Richtigkeit dieser Behauptung hervor?

Durch die Verminderung des Zählers bei unverändertem Nenner werden der Theile weniger, also der Bruch kleiner; durch Vermehrung des Nenners aber werden, bei unverändertem Zähler, d. h.

bei unveränderter Anzahl der Theile, diese Theile kleiner, also auch der Bruch.

10. Wie läßt sich dies durch ein Beispiel verdeutlichen?

Wenn man z. B. den Zähler eines Bruchs, etwa $\frac{4}{5}$ durch 2 dividirt, den Nenner aber unverändert läßt, nämlich $\frac{4:2}{5}$ d. i. $\frac{2}{5}$; so wird der Bruch so vielmal kleiner, als in 2 Einheiten sind, also 2mal; eben dieses könnte man aber auch erreichen, wenn man den Nenner dieses Bruchs mit 2 multiplicirt, und den Zähler unverändert läßt: nämlich $\frac{4}{5:2}$ d. i. $\frac{2}{10}$.

11. Wie kann man das bisher Vorgetragene allgemein ausdrücken?

Man kann allgemein sagen: Ein Bruch wird um das 2, 3, 4 u. s. w. fache seines Werthes vermehrt oder vermindert; je nachdem man seinen Zähler mit 2, 3, 4 u. s. w. multiplicirt oder dividirt; oder seinen Nenner mit 2, 3, 4 u. s. w. dividirt oder multiplicirt.

12. Was für ein wichtiger Satz folgt hieraus?

Es folgt hieraus der wichtige Satz, daß der Werth eines Bruches ungeändert bleibt, wenn man Zähler und Nenner mit einer und derselben Zahl multiplicirt oder dividirt. Denn die Multiplication des Zählers vergrößert den Bruch so vielmal, als die Multiplication des Nenners den vergrößerten Bruch wieder verkleinert. Z. B. $\frac{1}{2}$ im Zählen und Nenner durch 12 multiplicirt giebt $\frac{1 \cdot 12}{2 \cdot 12}$ d. i. $\frac{12}{24}$; dieser letzte Bruch ist mit dem Bruch $\frac{1}{2}$ ganz von gleichem Werthe. Denn durch die Multiplication

des Zählers mit 12 wurde der Bruch 12 mal grö-ßer; aber durch die Multiplication des Nenners mit eben der Zahl 12, wurde er wieder 12 mal verkleinert, also blieb sein Werth ungeändert.

Eben so wird durch die Division des Zählers eines Bruches der Bruch so vielmal verkleinert, als er durch die Division des Nenners mit der nämlichen Zahl wieder vergrößert wird. Z. B. $\frac{9}{15}$ im Zähler und Nenner mit 3 dividirt, giebt $\frac{9:3}{15:3}$ d. i. $\frac{3}{5}$. Dieser letzte Bruch ist dem Bruche $\frac{9}{15}$ am Werthe ganz gleich; denn indem der Zäh-ler dieses Bruches, 9, durch 3 dividirt wurde, wurde der Bruch 3 mal kleiner; aber durch die Division des Nenners 15 mit eben dieser Zahl 3, wurde er wieder 3 mal größer, also blieb sein Werth un-geändert.

13. Warum ist dieser Satz wichtig?

Er ist darum wichtig, weil er uns ein Mit-tel an die Hand giebt, Brüche, deren Zähler und Nenner größere Zahlen sind, unbeschadet ihres Wer-thes in kleinern Zahlen auszudrücken und Brüche von verschiedener Benennung unter einerlei Benen-nung zu bringen, welches beiden für die Rechnun-gen mit Brüchen von ungemeinem Nutzen ist. Wie dies aber nun geschehen könne, soll in den folgen-den Kapiteln gezeigt werden.

Achtzehntes Kapitel.

Vom Abkürzen, oder Aufheben der Brüche.

1. Was heißt einen Bruch abkürzen?

Einen Bruch abkürzen (abbreviren, aufheben), heißt in kleinern Zahlen ausdrücken, ohne daß sein Werth geändert wird.

2. Wie kann dies geschehen?

Dies kann dadurch geschehen, daß man Zähler und Nenner des Bruches mit einer und derselben Zahl dividirt

3. Wie läßt sich dies durch ein Beispiel deutlich machen?

Wenn man z. B. den Bruch $\frac{24}{60}$ unbeschadet seines Werthes durch kleinere Zahlen ausdrücken will, so darf man nur Zähler und Nenner derselben durch ein und dieselbe Zahl, vielleicht durch 6 dividiren; nämlich: $\frac{24:6}{60:6}$ d. i. $\frac{4}{10}$. Dieser letztere Bruch ist mit dem Bruche $\frac{24}{60}$ ganz gleich, nur daß er durch kleinere Zahlen ausgedrückt ist. Daß der Werth des Bruches $\frac{24}{60}$ durch dieses Abkürzen nicht geändert worden ist, geht daraus hervor, daß Zähler und Nenner durch ein und dieselbe Zahl dividirt worden ist (17, 12).

4. Wie kann man einen Bruch durch die möglichst kleinsten Zahlen ausdrücken?

Die Art und Weise, wie man einen Bruch durch die kleinsten Zahlen, die nur möglich sind, ausdrücken kann, ist folgende:

Man dividirt den Nenner des Bruches durch

den Zähler; geht die Division auf, so kann man Zähler und Nenner des vorliegenden Bruches durch den Zähler selbst ohne Rest dividiren, und ihn so auf die kleinsten Zahlen bringen. Geht die Division aber nicht auf; so dividirt man von neuem den vorigen Divisor mit dem gebliebenen Reste; bleibt wieder ein Rest, so dividirt man abermals den vorhergehenden Divisor durch diesen Rest; und so fährt man fort, immer mit dem gebliebenen Reste in den vorhergehenden Divisor zu dividiren, so lange bis die Division aufgeht; und dann ist der letzte Divisor diejenige Zahl, durch welche man Zähler und Nenner des Bruchs dividiren, und ihn so auf die kleinsten Zahlen bringen kann.

5. Wie läßt sich dies durch ein Beispiel anschaulicher machen?

Wollte man z. B. den Bruch $\frac{189}{301}$ abkürzen, so dividire man den Nenner mit dem Zähler; mit dem bleibenden Reste dividirt man in den letzten Divisor u. s. w., nämlich:

189 | 301 | 1
189
112 | 189 | 1
112
„77 | 112 | 1
77
35 | 77 | 2
70
„7 | 35 | 5
35
„

Hier geht also die Division auf, und der letzte Divisor ist 7. Mit dieser Zahl dividirt man den Zähler und Nenner des gegebenen Bruches $\frac{189}{301}$, so wird er in den kleinsten Zahlen ausgedrückt; nämlich $\frac{189:7}{301:7}$ d. i. $\frac{27}{43}$. Dieser letztere Bruch ist mit dem erstern ganz von gleichem Werthe.

6. Kann man durch dieses Verfahren wirklich eine Zahl finden, durch welche Zähler und Nenner eines Bruches ohne Rest dividirt werden können?

Die Richtigkeit des angegebenen Verfahrens gründet sich auf folgendes: wenn eine Zahl, z. B. 4, in einer andern Zahl, z. B. 12 aufgeht; so geht sie auch in jedem Producte der letztern auf, z. B. in 2 . 12 d. i. 24; in 3 . 12 d. i. 36 u. s. w. Sie geht aber auch in jeder Zahl auf, die aus einem solchen Producte und ihr selbst, oder einem Producte von ihr, zusammengesetzt ist; d. h. 4 geht auch auf in 12 + 4 d. i. 16; in 2.12 + 2.4, d. i. 24 + 8 d. i. 32; ferner in 3 . 12 + 3 . 4 d. i. 48 u. s. w. Hat man nur einen Bruch, z. B. $\frac{280}{960}$, den man durch die möglichst kleinsten Zahlen ausdrücken will, und man verfährt, wie angezeigt worden; nämlich:

280 | 960 | 3
840
120 | 280 | 2
240
40 | 120 | 3
120
0

so findet man, daß 40 diejenige Zahl ist, durch welche sich Zähler und Nenner des gegebenen Bruchs ohne Rest dividiren lassen. Denn nach dem oben Gesagten geht 40, da es in 120 aufgeht, auch in 2 . 120 + 40 d. i. in 280, also im Zähler auf; da es aber in 280 aufgeht, so wird es auch in 3 . 280 + 3 . 40 d. h. in 840 + 120 d. i. in 960, oder in dem Nenner des Bruchs aufgehen.

7. Wenn aber bei der Division des Nenners durch den Zähler irgend einmal 1 als Rest erscheint; wie ist es da?

In diesem Falle giebt es gar keine Zahl, durch welche sich Zähler und Nenner des Bruchs ohne Rest dividiren lassen. Z. B. wenn man den Bruch $\frac{74}{6513}$ abkürzen wollte, so müßte man den Nenner durch den Zähler u. s. w. dividiren; nämlich:

74 | 6513 | 88
592
„593
592
„„1

Hier kommt gleich bei der ersten Division der Rest 1; und dies ist ein Zeichen, daß es gar keine Zahl giebt, durch welche der Zähler und Nenner des gegebenen Bruchs sich ohne Rest dividiren lassen, und daß sich also der Bruch durchaus nicht abkürzen läßt.

8. Was für ein anderes Verfahren, als das bisher beschriebene, kann man noch anwenden, um einen gegebenen Bruch auf die kleinsten Zahlen zu bringen?

Dieses andere Verfahren, das mit dem angegebenen auf eins hinaus läuft, ist folgendes:

Man sucht vermittelst der in Kap. 11 angegebenen Regeln irgend eine kleine Zahl, durch welche sich der Zähler und Nenner des gegebenen Bruches ohne Rest dividiren lassen, und dividirt nun; so erhält man einen neuen Bruch, den man auf dieselbe Art noch weiter abkürzt. So fährt man fort, bis man auf einen Bruch kommt, der sich nicht weiter abkürzen läßt. Wenn z. B. der Bruch $\frac{248}{864}$ abgekürzt werden sollte, so verfährt man auf folgende Art:

$$\frac{248}{864} \overset{2}{\underset{\frown}{}} \frac{124}{432} \overset{2}{\underset{\frown}{}} \frac{62}{216} \overset{2}{\underset{\frown}{}} \frac{31}{108}$$

Da der Zähler und Nenner des gegebenen Bruchs gerade Zahlen waren; so ließen sie sich beide durch 2 ohne Rest dividiren. Man erhielt dadurch den neuen Bruch $\frac{124}{432}$, der mit dem gegebenen ganz von gleichem Werthe ist. Der Zähler und Nenner dieses neuen Bruchs ließen sich wiederum durch 2 ohne Rest dividiren; und man erhielt den Bruch $\frac{62}{216}$, dessen Zähler und Nenner sich wieder durch 2 ohne Rest dividiren ließen; und man erhielt so den Bruch $\frac{31}{108}$, der sich nun nicht weiter abkürzen läßt. Der gegebene Bruch ist also in den kleinsten Zahlen ausgedrückt. Daß sein Werth nicht geändert worden ist, geht daraus hervor, weil immer Zähler und Nenner durch einerlei Zahl dividirt wurde.

Folgendes Beispiel wird nun ohne Erklärung verständlich seyn:

10	2	3	7	
7560	756	378	126	18
60060	6006	3003	1001	143

9. Giebt es nicht noch ein drittes Verfahren, einen gegebenen Bruch in den kleinsten Zahlen auszudrücken?

O ja! Man zerfällt nämlich sowohl den Zähler, als den Nenner des Bruches in ihre einfachen Factoren, wie es Kap. 11, 27 gelehrt worden ist, und streicht dann die gleichen Factoren im Zähler und Nenner gegen einander weg.

Sollte z. B. der Bruch $\frac{168}{560}$ abgekürzt werden, so kann man 168 zerfällen in 2 . 2 . 2 . 3 . 7; und 560 in 2 . 2 . 2 . 2 . 5 . 7; also ist der Bruch $\frac{168}{560}$ eben so viel, als $\frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7}$. Streicht man nun die gleichen Factoren im Zähler und Nenner gegen einander weg, nämlich $\frac{\not{2} \cdot \not{2} \cdot \not{2} \cdot 3 \cdot \not{7}}{\not{2} \cdot \not{2} \cdot \not{2} \cdot 2 \cdot 5 \cdot \not{7}}$, so erhält man $\frac{3}{2 \cdot 5}$ oder $\frac{3}{10}$ als den abgekürzten Bruch. Daß dieses Verfahren seine Richtigkeit habe, geht daraus hervor, daß durch das Wegstreichen der gleichen Factoren Zähler und Nenner durch einerlei Zahl dividirt worden ist.

10. Ist das Abkürzen der Brüche von Nutzen?

Ja, es ist von großem Nutzen. Denn die Rechnungen werden offenbar vereinfacht und erleichtert, wenn man mit kleinern Zahlen rechnet;

auch erhält man durch dieses Abkürzen eines Bruches oft eine deutlichere Vorstellung vom Werthe desselben; z. B. $\frac{1}{2}$ Loth ist leichter zu verstehen, als $\frac{16}{32}\frac{43}{86}$ Loth; und doch haben beide Brüche einerlei Werth. Anfänger müssen sich daher im Abkürzen der Brüche sehr üben.

Neunzehntes Kapitel.

Brüche von verschiedener Benennung auf einerlei Benennung zu bringen.

1. Was sind Brüche von verschiedener Benennung?

Brüche von verschiedener Benennung sind solche, welche verschiedene Nenner haben, wie z. B. $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{11}$ u. s. w.

2. Was sind Brüche von einerlei Benennung?

Brüche von einerlei Benennung sind solche, die einerlei Nenner haben, wie z. B. $\frac{1}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{6}{7}$ 2c.

3. Was heißt Brüche von verschiedener Benennung unter einerlei Benennung bringen?

Es heißt: Brüche, die verschiedene Nenner haben, unbeschadet ihres Werthes in andere verwandeln, die einerlei Nenner haben.

4. Wie kann dies geschehen?

Die Art und Weise, wie man Brüche von verschiedener Benennung unbeschadet ihres Werthes unter einerlei Benennung bringt, ist folgende:

Man multiplicirt den Zähler und den Nenner eines jeden der gegebenen Brüche mit den Nennern

aller andern Brüche, nur mit seinem eignen nicht.

5. Wie läßt sich dies durch ein Beispiel deutlich machen?

Wollte man z. B. die Brüche $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$ unter einerlei Benennung bringen, so multiplicire man den Zähler und Nenner jedes Bruchs mit den Nennern der übrigen Brüche, nur mit seinem eignen nicht; nämlich:

$\frac{2}{5}$ auf diese Art multiplicirt, giebt $\frac{2.4.7}{5.4.7}$ d. i. $\frac{56}{140}$

$\frac{3}{4}$ = = = = = $\frac{3.5.7}{4.5.7}$ d. i. $\frac{105}{140}$

$\frac{5}{7}$ = = = = = $\frac{5.5.4}{7.5.4}$ d. i. $\frac{100}{140}$

Die gegebenen Brüche sind also in die Brüche $\frac{56}{140}$, $\frac{105}{140}$, $\frac{100}{140}$ verwandelt worden, welche alle einerlei Nenner haben.

6. Worauf beruht die Richtigkeit dieses Verfahrens?

Sie beruht darauf, daß der Werth eines Bruches, der im Zähler und Nenner mit einerlei Zahl multiplicirt wird, nicht verändert wird (17, 12). Daß die neuen Brüche, welche durch dieses Verfahren entstehen, alle einerlei Nenner erhalten müssen, geht daraus hervor, daß die Nenner der neuen Brüche alle durch die Multiplication aller Nenner der gegebenen Brüche, also aus einerlei Factoren, entstanden sind.

7. Was muß man, um sich die Arbeit zu erleichtern, mit den Brüchen vornehmen, ehe man

sie auf die angezeigte Weise in solche verwandelt, die einerlei Nenner haben?

Man kann sich die Arbeit dadurch erleichtern, daß man die Brüche so viel als möglich abkürzt oder auf die kleinsten Zahlen bringt, ehe man diese Verwandlung vornimmt. Z. B. wenn die Brüche $\frac{104}{208}$, $\frac{48}{72}$, $\frac{7}{49}$ auf einerlei Benennung gebracht werden sollen; so müßte man nach dem Vorigen den Zähler und Nenner jedes dieser Brüche mit den Nennern aller übrigen multipliciren. Man erhielt also

für den ersten $\frac{104.72.49}{208.72.49}$ d. i. $\frac{366912}{733824}$

für den zweiten $\frac{48.208.49}{72.208.49}$ d. i. $\frac{489216}{733824}$

für den dritten $\frac{7.208.72}{49.208.72}$ d. i. $\frac{104832}{733824}$

Leichter kommt man zum Ziel, wenn man die gegebenen Brüche erst abkürzt. Man erhält dann für den ersten Bruch: $\frac{1}{2}$, für den zweiten $\frac{2}{3}$; und für den dritten $\frac{1}{7}$. Daß man nicht so viele Arbeit hat, diese Letztern Brüche, die mit den gegebenen ganz einerlei sind, auf gleiche Benennung zu bringen, leuchtet ein. Denn nun erhält man

für den ersten: $\frac{1.3.7}{2.3.7}$ d. i. $\frac{21}{42}$

für den zweiten: $\frac{2.2.7}{3.2.7}$ d. i. $\frac{28}{42}$

für den dritten: $\frac{1.2.3}{7.2.3}$ d. i. $\frac{6}{42}$

8. Wenn sich aber die gegebenen Brüche nicht abkürzen lassen, und doch in großen Zahlen ausgedrückt sind: kann man sich dann die Arbeit nicht auch erleichtern?

Allerdings! Wenn man viele Brüche, oder solche, deren Nenner große Zahlen sind, und die nicht abgekürzt werden können, auf einerlei Benennung zu bringen hat, so würde das Verfahren, wie es gelehrt worden ist, offenbar sehr weitläuftig seyn. Hätte man z. B. die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{5}{18}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$ auf einerlei Benennung zu bringen, so müßte man den Zähler und Nenner jedes Bruchs mit den Nennern aller übrigen Brüche multiplíciren, und man erhielt also für den ersten dieser Brüche, nämlich $\frac{1}{2}$

$$\frac{1 \cdot 12 \cdot 18 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 3}{2 \cdot 12 \cdot 18 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 3} \text{ d. i. } \frac{23328}{46656}$$

Man sieht hieraus, wie mühsam es ist, nur einen einzigen Bruch so zu verwandeln, und noch weit mühsamer müßte es seyn, wenn man die 5 noch übrigen Brüche eben so verwandeln wollte. Um diese Weitläuftigkeit zu vermeiden, verfahre man auf folgende Art:

Zuerst untersucht man, ob der größte der gegebenen Nenner so beschaffen ist, daß alle übrigen Nenner in ihm aufgehen. Ist dieses der Fall, so ist dieser größte Nenner selbst der gemeinschaftliche, oder Generalnenner. Hat der größte Nenner aber diese Eigenschaft nicht, so versuche man, ob in dem Zweifachen desselben alle anderen Nenner aufgehen. Ist es der Fall, so ist dieses Zweifache

des größten Nenners der gemeinschaftliche Nenner. Geht es aber auch mit dem Zweifachen nicht, so nehme man das Dreifache, Vierfache u. s. w. des größten Nenners, bis man auf ein Vielfaches desselben kommt, in welchem alle anderen Nenner aufgehen. Dasjenige Vielfache, bei welchem es der Fall ist, ist der gemeinschaftliche oder Generalnenner.

9. Wie findet man nun die Zähler zu diesem neuen Nenner?

Man findet sie, wenn man mit dem Nenner jedes Bruchs in den Generalnenner dividirt, und den Quotienten mit dem alten Zähler multiplicirt.

10. Wie läßt sich dieses Verfahren durch Beispiele deutlich machen?

Sollte man z. B. die Brüche $\frac{7}{90}$, $\frac{8}{45}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{11}{30}$ unter einerlei Benennung bringen, so untersucht man, ob in dem größten Nenner, 90, die andern Nenner alle aufgehen. Dieses ist nun hier der Fall, und 90 ist also der gemeinschaftliche Nenner, oder der Generalnenner. Der erste Bruch $\frac{7}{90}$ bleibt also ungeändert, weil er den Generalnenner schon hat. Um nun zu dem zweiten Bruche, $\frac{8}{45}$, den Zähler zu finden, dividire man den gemeinschaftlichen Nenner 90 durch den Nenner dieses Bruches, also durch 45, giebt zum Quotienten 2. Diesen Quotienten multiplicire man mit dem alten Zähler, also mit 8, giebt 16, welches der Zähler des neuen Bruchs ist, und dieser zweite Bruch heißt also nun $\frac{16}{90}$. Auf ähnliche Art findet man nun die Zähler der übrigen Brüche; und die

neuen Brüche von einerlei Benennung, in welche die gegebenen verwandelt sind, heißen nun der Reihe nach:

$\frac{7}{72}$, $\frac{16}{72}$, $\frac{63}{72}$, $\frac{33}{72}$.

Eben so verfährt man bei folgenden Brüchen:

$\frac{1}{2}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{5}{18}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{2}{3}$.

Hier hat der größte Nenner 18 nicht die verlangte Beschaffenheit; auch nicht das Zweifache desselben, nämlich 36; auch nicht das Dreifache, nämlich 54; wohl aber ist das Vierfache desselben, 72, so beschaffen, daß die Nenner aller andern Brüche darin aufgehen; folglich ist 72 der gemeinschaftliche Nenner. Die neuen Zähler findet man nun, indem man mit dem Nenner jedes gegebenen Bruches den Generalnenner dividirt, und den Quotienten mit dem Zähler eben desselben Bruches multiplicirt; also

für $\frac{1}{2}$ 72 : 2 d. i. 36 multiplicirt mit 1 giebt 36
= $\frac{7}{12}$ 72 : 12 d. i. 6 = = = 7 = 42
= $\frac{5}{18}$ 72 : 18 d. i. 4 = = = 5 = 20
= $\frac{4}{9}$ 72 : 9 d. i. 8 = = = 4 = 32
= $\frac{3}{8}$ 72 : 8 d. i. 9 = = = 3 = 27
= $\frac{2}{3}$ 72 : 3 d. i. 24 = = = 2 = 48

Die neuen Brüche heißen also der Reihe nach

$\frac{36}{72}$, $\frac{42}{72}$, $\frac{20}{72}$, $\frac{32}{72}$, $\frac{27}{72}$, $\frac{48}{72}$.

11. Wird auf diese Art der kleinstmöglichste gemeinschaftliche, oder Generalnenner gefunden?

Ja, man findet durch dieses Verfahren den kleinsten Generalnenner, der nur möglich ist. Sollte es z. B. bei den obigen Brüchen einen kleinern gemeinschaftlichen Nenner geben, als das Vierfache

des größten Nenners, 72; so wäre er vielleicht ein kleineres Vielfaches des größten Nenners, als das Vierfache. Dieses kann aber nicht seyn, da weder in dem 1, noch 2, noch 3 fachen desselben die andern Nenner alle aufgehen. Eine andere Zahl außer einem Vielfachen des größten Nenners kann es aber auch nicht seyn, weil in derselben sonst dieser größte Nenner nicht aufgehen würde. Also wird auf die angezeigte Weise wirklich der kleinste nur mögliche gemeinschaftliche, oder Generalnenner gefunden.

12. Warum ist es nöthig, Brüche von verschiedener Benennung auf einerlei Benennung bringen zu können?

Es ist darum unerläßig nöthig, weil man sonst die meisten Brüche weder addiren noch subtrahiren könnte, da nur gleichartige Zahlen addirt und subtrahirt werden können, Brüche von verschiedener Benennung aber ungleichartig sind. Außerdem werden wir dadurch noch in den Stand gesetzt, zu beurtheilen, welcher von 2 oder mehrern gegebenen Brüchen, die weder gleiche Zähler noch gleiche Nenner haben, der größte sey. Denn wollte man z. B. wissen, welcher von den beiden Brüchen $\frac{3}{5}$ und $\frac{4}{7}$ der größere sey, so bringt man sie auf einerlei Benennung, und man erhält dann für $\frac{3}{5}$ den neuen Bruch $\frac{21}{35}$, für $\frac{4}{7}$ aber $\frac{20}{35}$. Nun sieht man offenbar, daß der erstere Bruch größer ist, als der letztere, weil sein Zähler größer ist als der Zähler des letztern, die Nenner aber gleich sind (17, 2). Also ist auch $\frac{3}{5}$ größer, als $\frac{4}{7}$. Auf eben dieselbe Art findet man, daß von den

Brüchen $\frac{7}{9}$ und $\frac{15}{18}$ der letztere grösser ist, als der erstere; denn bringt man sie einerlei Benennung, so erhält man für den ersten $\frac{14}{18}$; dieser Bruch ist offenbar kleiner als $\frac{15}{18}$; also ist auch $\frac{7}{9}$ kleiner, als $\frac{15}{18}$.

Zwanzigstes Kapitel.

Ganze und gemischte Zahlen in Brüche zu verwandeln.

1. Was heißt das: eine ganze Zahl in einen Bruch verwandeln?

Es heißt, der ganzen Zahl die Gestalt eines Bruches geben; oder sie durch einen uneigentlichen Bruch ausdrücken.

2. Wie kann eine ganze Zahl in einen Bruch verwandelt werden?

Wenn kein Nenner bestimmt ist, so braucht man weiter nichts zu thun, als die ganze Zahl als Zähler zu setzen, und 1 als Nenner unterzuschreiben. Z. B. 4 ist eben so viel, als der Bruch $\frac{4}{1}$; denn der letztere bedeutet, daß die Einheit gar nicht getheilt, und 4 mal genommen werden soll. Eben so ist 6 so viel, als $\frac{6}{1}$; 11 so viel als $\frac{11}{1}$ u. s. w.

Soll aber die gegebene ganze Zahl in einen Bruch verwandelt werden, dessen Nenner vorgeschrieben ist, so multiplicire man die gegebene Zahl mit dem vorgeschriebenen Nenner; so ist das Product der Zähler. Sollte z. B. die Zahl 3 in einen Bruch verwandelt werden, dessen Nenner 4 ist; so

multiplicire man die Zahl 3 mit dem gegebenen Nenner 4, so ist das Product 12, der neue Zähler; und der gegebene Nenner 4 wird darunter geschrieben, nämlich $\frac{12}{4}$. Dieser uneigentliche Bruch ist mit der ganzen Zahl 3 einerlei, denn wenn man den Zähler durch den Nenner dividirt, so erhält man die ganze Zahl 3 als den Werth des Bruches (vgl. 16, 10).

3. Was heißt: „eine gemischte Zahl in einen Bruch verwandeln“?

Es heißt die gemischte Zahl durch einen unechten = oder Afterbruch ausdrücken.

4. Wie wird eine gemischte Zahl in einen Bruch verwandelt?

Dies geschieht dadurch, daß man die ganze Zahl mit dem Nenner des dabeistehenden Bruchs multiplicirt, und hierzu den Zähler desselben addirt. Sollte z. B. die gemischte Zahl $5\frac{2}{3}$ in einen Bruch verwandelt werden, so multiplicire man die ganze Zahl 5 mit dem Nenner 3, des dabeistehenden Bruchs $\frac{2}{3}$. Dies giebt 15; Hierzu addire man den Zähler des Bruchs, so erhält man $\frac{17}{3}$. Dieser Bruch ist eben so viel als die gegebene gemischte Zahl $5\frac{2}{5}$; denn dividirt man mit dem Nenner 3, in den Zähler 17, so erhält man $5\frac{2}{3}$ als den Werth dieses Bruches (17, 13). Eben so ist $6\frac{5}{7} = \frac{47}{7}$; $12\frac{1}{9} = \frac{109}{9}$.

Ein und zwanzigstes Kapitel.

Von der Addition und Subtraction der Brüche.

1. Wieviel verschiedene Fälle können bei der Addition in Brüchen vorkommen?

Es können 3 verschiedene Fälle vorkommen. Entweder sind

1) blos Brüche zu addiren; oder
2) Brüche und ganze Zahlen; oder
3) gemischte Zahlen.

2. Wie werden Brüche addirt?

Wenn die zu addirenden Brüche alle gleiche Nenner haben, so addire man ihre Zähler, und schreibe den gemeinschaftlichen Nenner darunter. Ist dieser Bruch, den man auf diese Art erhält, ein Afterbruch, so ziehe man durch Division des Zählers mit dem Nenner die Ganzen heraus, und kürze dann den etwa noch bleibenden Bruch gehörig ab. Sollen z. B. die Brüche $\frac{5}{8}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{2}{8}$ addirt werden, so werden blos die Zähler addirt, giebt 18, und der gemeinschaftliche Nenner untergeschrieben, giebt also $\frac{18}{8}$ oder $2\frac{2}{8}$, oder $2\frac{1}{4}$. — Wenn aber die Brüche nicht einerlei Benennung haben, so bringe man sie auf einerlei Benennung, und verfahre dann wie vorher. Sollten z. B. die Brüche $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ addirt werden, so muß man sie erst auf einerlei Benennung bringen; man erhält dann für sie der Reihe nach $\frac{10}{12}$, $\frac{6}{12}$, $\frac{9}{12}$; diese nach dem Vorigen addirt, giebt $\frac{25}{12}$ oder $2\frac{1}{12}$ als die Summe der gegebenen Brüche.

3. Wie läßt sich darthun, daß das angezeigte Verfahren richtig ist, und man durch dasselbe wirklich die Summe von mehrern Brüchen findet?

Die Richtigkeit des angegebenen Verfahrens geht leicht aus folgendem hervor: der Zähler des Bruchs ist, wie schon früher (16, 4) erwähnt worden, die eigentliche Zahl des Bruchs, da er die Menge der vorhandenen Theile anzeigt; der Nenner hingegen ist blos der Name, d. h. er zeigt an, von welcher Art die Theile sind. Haben also 2 oder mehrere Brüche gleiche Nenner, so ist klar, daß nur die Zähler addirt werden dürfen, und der gemeinschaftliche Nenner oder Name darunter geschrieben wird. Sollen z. B. die Brüche $\frac{1}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{7}$ addirt werden, so könnte ich sie auch so schreiben und addiren:

1 Siebentheil
3 Siebentheile
5 Siebentheile

Summe 9 Siebentheile; oder $\frac{9}{7}$ d. i. $1\frac{2}{7}$.

Sind aber die zu addirenden Brüche von verschiedener Benennung, d. h. haben sie verschiedene Nenner, so können sie eigentlich unmittelbar gar nicht addirt werden, weil Brüche von verschiedener Benennung nichts anders sind, als ungleichartige Zahlen. Wie sollte z. B. die Summe der Brüche $\frac{3}{4}$ und $\frac{7}{8}$, oder anders geschrieben von 3 Viertel und 7 Achtel heißen? Etwa 10 Viertel? oder 10 Achtel? Keins von beiden; sondern diese Brüche können, so wie sie hier stehen, gar nicht

addirt werden, weil sie ungleichartig sind. Macht man sie aber gleichartig, d. h. bringt man sie unter einerlei Benennung, oder auf einerlei Namen, so können sie wohl in eine Summe gebracht werden. Nämlich $\frac{3}{4}$ ist eben so viel, als $\frac{6}{8}$, und hierzu $\frac{5}{8}$ addirt, giebt $\frac{11}{8}$ oder $1\frac{3}{8}$.

4. Wie verfährt man, wenn ganze Zahlen und Brüche addirt werden sollen?

Man addirt dann die Brüche besonders, und auch die ganzen Zahlen. Enthält die die Summe der Brüche Ganze, so zieht man sie durch Division heraus, und addirt sie zu der Summe der ganzen Zahlen. Sollte z. B. 8, 4, $\frac{1}{2}$, 3, $\frac{7}{8}$, $\frac{2}{3}$ addirt werden; so schreibe man die ganzen Zahlen unter einander, und eben so die Brüche; nämlich:

8	
4	
$\frac{1}{2}$	$\frac{12}{24}$
3	
$\frac{7}{8}$	$\frac{21}{24}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{24}$
15	$\frac{49}{24}$ d. i. $2\frac{1}{24}$

Summe $17\frac{1}{24}$.

Nun bringe man die Brüche auf einerlei Benennung, und addire sie, so erhält man $\frac{49}{24}$ oder $2\frac{1}{24}$. Dann addire man die ganzen Zahlen, giebt 15; hierzu die 2 Ganzen, welche in der Summe

der Brüche stecken, addirt, giebt $17\frac{1}{24}$ als die Summe der gegebenen ganzen Zahlen und Brüche.

5. Wie addirt man gemischte Zahlen?

Dies geschieht, indem man die gemischten Zahlen in Brüche verwandelt, und sie dann, wie bereits gelehrt worden ist, addirt. Sind z. B. zu addiren $3\frac{1}{2}$, $4\frac{3}{4}$, $1\frac{1}{8}$, $2\frac{5}{6}$; so verwandele man jede dieser gemischten Zahlen in einen Bruch; man erhält dann der Reihe nach:

$$\frac{7}{2}, \quad \frac{19}{4}, \quad \frac{9}{8}, \quad \frac{17}{6}.$$

Diese Brüche bringe man unter einerlei Benennung, so erhält man

$$\frac{84}{24}, \quad \frac{114}{24}, \quad \frac{27}{24}, \quad \frac{68}{24}$$

Addirt man diese nun, so erhält man $\frac{293}{24}$ d. i. $12\frac{5}{24}$ als die Summe der gegebenen gemischten Zahlen.

Man kann aber auch ein anderes Verfahren anwenden, welches dasselbe ist, wie es bei Brüchen und ganzen Zahlen gelehrt worden ist, und welches die Arbeit erleichtert. Man addirt nämlich die Brüche für sich, zieht die etwa in der Summe derselben liegenden Ganzen heraus, und nimmt diese mit zu der Summe der ganzen Zahlen. Auf diese Art würde obiges Beispiel so stehen:

$3\frac{1}{2}$	$\frac{12}{24}$
$4\frac{3}{4}$	$\frac{18}{24}$
$1\frac{1}{8}$	$\frac{3}{24}$
$2\frac{5}{6}$	$\frac{20}{24}$
10	$\frac{53}{24}$ oder $2\frac{5}{24}$

Summe $12\frac{5}{24}$

$12\frac{5}{24}$ ist also die Summe der gegebenen gemischten Zahlen, gerade so, wie wir sie vorher gefunden hatten. Diese zweite Art, gemischte Zahlen zu addiren, verdient vor der ersten unbedingt den Vorzug.

6. Wie viel Fälle kommen bei der Subtraction in Brüchen vor?

Es sind 3 Fälle zu bemerken: Entweder ist

1) ein Bruch von einem andern Bruche zu subtrahiren; oder
2) ein Bruch oder eine gemischte Zahl von einer ganzen Zahl; oder
3) eine gemischte Zahl, oder ein Bruch oder eine ganze Zahl von einer gemischten Zahl.

7. Was gilt in allen diesen Fällen in Hinsicht des Subtrahendus für eine Regel?

Es gilt in allen diesen Fällen für den Subtrahendus eben dieselbe Regel, die bei der Subtraction ganzer Zahlen galt. Der Subtrahendus darf nämlich nicht grösser seyn, als der Minuendus, weil sonst die Subtraction gar nicht verrichtet werden kann.

8. Was hat man zu thun, wenn ein Bruch von einem andern Bruche subtrahirt werden soll?

Haben die Brüche einerlei Benennung, so subtrahirt man den Zähler des Subtrahendus von dem Zähler des Minuendus, und schreibt dem Reste den gemeinschaftlichen Nenner unter. Haben aber die Brüche verschiedene Benennung, so bringe man sie zuerst auf einerlei Benennung, und verfahre dann wie vorher.

9. Wie läßt sich dies durch ein Beispiel deutlich machen?

Sollte z. B. der Bruch $\frac{3}{8}$ von $\frac{7}{8}$ abgezogen werden, so ziehe man seinen Zähler 3 von dem Zähler dieses Bruches, 7, ab, und schreibe den gemeinschaftlichen Nenner 8 unter den Rest. Man erhält dann $\frac{4}{8}$, oder abgekürzt $\frac{1}{2}$, als den Unterschied der beiden gegebenen Brüche.

Sollte man aber $\frac{3}{5}$ von $\frac{7}{10}$ abziehen, so müßte man diese Brüche erst unter einerlei Benennung bringen. Man erhielt dann für $\frac{3}{5}$ den Bruch $\frac{6}{10}$; diesen von $\frac{7}{10}$ nach dem Vorigen subtrahirt, giebt $\frac{1}{10}$ als Rest.

10. Woraus gehet die Richtigkeit dieses Verfahrens hervor?

Die Richtigkeit dieses Verfahrens wird eben so erwiesen, wie die Richtigkeit des Verfahrens bei der Addition. Denn da der Zähler die Menge, der Nenner aber blos die Art der Theile anzeigt, so dürfen offenbar, wenn die Nenner gleich sind, nur die Zähler subtrahirt werden. Haben die beiden Brüche aber verschiedene Nenner, so können sie unmittelbar gar nicht subtrahirt werden, weil sie nicht gleichartig sind. Denn z. B. $\frac{3}{4}$ d. i. 3 Viertel kann von $\frac{7}{8}$ d. i. 7 Achtel gar nicht subtrahirt werden. Nur dann lassen sich diese beiden Brüche wirklich subtrahiren, wenn man sie zuvor auf gleiche Benennung gebracht, also gleichartig gemacht hat.

11. Wie kann ein Bruch oder eine gemischte Zahl von einer ganzen Zahl subtrahirt werden?

Ist ein Bruch, z. B. $\frac{3}{4}$, von einer ganzen Zahl, z. B. 6, zu subtrahiren, so verwandelt man entweder die ganze Zahl in einen Bruch vom Nenner 4, nämlich in den Bruch $\frac{24}{4}$ (nach 20, 2); und subtrahirt $\frac{3}{4}$ hiervon; man erhält $\frac{21}{4}$ d. i. $5\frac{1}{4}$ als Rest; oder man borgt von der ganzen Zahl 6 eine Einheit, verwandelt diese in einen Bruch vom Nenner 4, giebt $5\frac{4}{4}$, und subtrahirt nun den Bruch $\frac{3}{4}$ von dem Bruche $\frac{4}{4}$, giebt $\frac{1}{4}$; die ganze Zahl 5 bleibt ungeändert, und der ganze Unterschied heißt $5\frac{1}{4}$, wie vorher. Dieses zweite Verfahren ist offenbar kürzer, als das erste.

Wenn aber der Subtrahendus eine gemischte Zahl, der Minuendus aber eine ganze Zahl ist, so verfährt man auf ähnliche Art. Man nimmt von dem Minuenden eine Einheit, und verwandelt sie in einen Bruch von demselben Nenner, wie der Bruch des Subtrahendus. Dann subtrahirt man den Bruch und eben so die ganzen Zahlen. Z. B.

Minuendus	8.	$\frac{2}{2}$
Subtrahendus	$3\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	5	$\frac{1}{2}$.

12. Wie verfährt man, wenn eine gemischte Zahl, oder ein Bruch, oder eine ganze Zahl von einer gemischten Zahl zu subtrahiren ist?

1) Wenn eine gemischte Zahl von einer andern gemischten Zahl zu subtrahiren ist, so schreibe man sie gehörig unter, und subtrahire dann den Bruch des Subtrahenden von dem des Minuenden, und eben so die ganze Zahl des

erstern von der ganzen Zahl des letztern. Haben die Brüche verschiedene Benennung; so müssen sie natürlich erst auf einerlei Benennung gebracht werden, ehe man die Subtraction verrichten kann. Wenn z. B. $2\frac{2}{5}$ von $8\frac{3}{5}$ subtrahirt werden soll, so schreibt man den Subtrahendus gehörig unter den Minuendus, subtrahirt den Bruch des erstern, $\frac{2}{5}$, von dem des letztern, $\frac{3}{5}$, giebt $\frac{1}{5}$, und die ganze Zahl des erstern;

2) von der ganzen Zahl des letztern, 8, giebt 6; und der Unterschied jener Zahlen ist also $6\frac{1}{5}$. Nämlich:

$$\begin{array}{r} 8\ \frac{3}{5} \\ 2\ \frac{2}{5} \\ \hline 6\ \frac{1}{5} \end{array}$$

Auf ähnliche Art verfährt man, wenn $3\frac{3}{4}$ von $5\frac{5}{6}$ abgezogen werden sollte; nur daß man hier die Brüche $\frac{3}{4}$ und $\frac{5}{6}$ erst unter einerlei Benennung bringen muß; nämlich:

Minuendus	$5\ \frac{5}{6}$	$\frac{10}{12}$
Subtrahendus	$3\ \frac{3}{4}$	$\frac{9}{12}$
Unterschied	$2\ \frac{1}{12}$.	

1) Sollte es sich hierbei treffen, daß der Bruch des Subtrahendus größer wäre, als der Bruch des Minuenden, und daß er also von diesem nicht subtrahirt werden könnte, so borgt man von der ganzen Zahl des Minuenden eine Einheit, macht sie zu einem Bruche von demselben Nenner, wie der Bruch des Minuenden, addirt diese beiden Brüche, und verrichtet dann die Subtraction. Z. B.

7.	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{15}{12}$
5	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{12}$	$\frac{8}{12}$
1			$\frac{7}{12}$.

Bringt man die beiden Brüche auf einerlei Benennung, so erhält man für den Bruch des Minuenden $\frac{3}{12}$, und für den des Subtrahenden $\frac{8}{12}$. Den Bruch des Subtrahenden kann man hier nicht von dem Bruche des Minuenden abziehen, weil er größer ist, als dieser. Man borgt daher von der ganzen Zahl 7 des Minuenden 1, verwandelt diese 1 in einen Bruch vom Nenner 12, giebt $\frac{12}{12}$, addirt diesen Bruch und den vorhandenen Bruch des Minuenden, giebt $\frac{15}{12}$. Der Minuendus heißt also $6\frac{15}{12}$. Hiervon kann man nun leicht $5\frac{8}{12}$ abziehen; es bleibt $1\frac{7}{12}$.

2) Ist ein Bruch von einer gemischten Zahl zu subtrahiren, so bedarf es weiter keiner besondern Vorschriften. Man subtrahirt diesen Bruch von dem Bruche des Minuenden, die ganze Zahl des Minuenden bleibt ungeändert. Wäre der Bruch des Minuenden kleiner als der Subtrahendus, so borgt man von der ganzen Zahl des Minuenden 1, und verfährt, wie so eben gesagt worden. Folgende Beispiele werden die Sache in das gehörige Licht setzen.

Minuendus	$8\frac{3}{4}$	$8\frac{1}{2}$	$\frac{5}{10}$	$3.\frac{2}{7}$	$\frac{9}{7}$	$2.\frac{1}{4}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{15}{12}$
Subtrahendus	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{10}{12}$	$\frac{10}{12}$
Unterschied	$8\frac{2}{4}$	8	$\frac{1}{10}$	2	$\frac{4}{7}$	1		$\frac{5}{12}$.

oder

$8\frac{1}{2}$

3) Ist endlich eine ganze Zahl von einer gemischten Zahl zu subtrahiren, so subtrahirt man sie von der ganzen Zahl des Minuendus, und schreibt zu dem Unterschiede den Bruch desselben unverändert. Z. B.

Minuendus	$8\frac{3}{4}$	$12\frac{7}{8}$
Subtrahendus	3	10
Unterschied	$5\frac{3}{4}$	$2\frac{7}{8}$.

Zwei und zwanzigstes Kapitel.

Von der Multiplication und Division in Brüchen.

1. Wie vielerlei Fälle lassen sich bei der Multiplication in Brüchen unterscheiden?

Es lassen sich 5 verschiedene Fälle unterscheiden; denn entweder sollen

1) Brüche mit ganzen Zahlen, oder auch umgekehrt ganze Zahlen mit Brüchen multiplicirt werden; oder
2) gemischte Zahlen mit ganzen Zahlen, oder umgekehrt; oder
3) Brüche mit Brüchen; oder
4) gemischte Zahlen mit Brüchen, oder umgekehrt Brüche mit gemischten Zahlen; oder endlich
5) gemischte Zahlen mit gemischten Zahlen.

2. Wie werden Brüche mit ganzen Zahlen multiplicirt?

Soll ein Bruch mit einer ganzen Zahl multiplicirt werden, so multiplicire man mit der gan-

zen Zahl entweder den Zähler des Bruchs, oder dividire damit seinen Nenner. Dies Letztere thut man nur dann, wenn der Nenner des gegebenen Bruchs sich durch die ganze Zahl ohne Rest dividiren läßt. Z. B.

$\frac{3}{4} \times 4 = \frac{3.4}{4}$ d. i. $\frac{12}{4}$ oder 3
$\frac{1}{2} \times 5 = \frac{1.5}{2}$ d. i. $\frac{5}{2}$ oder $2\frac{1}{2}$
$\frac{3}{8} \times 4 = \frac{3}{8:4}$ d. i. $\frac{3}{2}$ oder $1\frac{1}{2}$
$\frac{5}{18} \times 9 = \frac{5}{18:9}$ d. i. $\frac{5}{2}$ oder $2\frac{1}{2}$.

3. Woraus geht die Richtigkeit dieses Verfahrens hervor?

Sie gehet aus Folgendem hervor: wenn ein Bruch, z. B. $\frac{3}{4}$, mit einer ganzen Zahl, z. B. 4, multiplicirt werden soll, so heißt dies, nach der Erklärung der Multiplication, nichts anders, als der Bruch $\frac{3}{4}$ soll 4 mal genommen werden. Da nun der Zähler die Menge der Theile angiebt, der Nenner aber blos die Art derselben, so muß der Zähler mit der ganzen Zahl multiplicirt, und der Nenner desselben ungeändert gelassen werden. Wenn man statt $\frac{3}{4}$ schriebe 3 Viertel, so fällt es in die Augen, daß 3 Viertel 4 mal genommen 12 Viertel oder $\frac{12}{4}$ d. i. 3 giebt. Man könnte den Bruch $\frac{3}{4}$ aber auch mit 4 multipliciren, wenn man den Nenner desselben durch 4 dividirte. Denn auch dann wird der Bruch $\frac{3}{4}$ viermal größer, oder 4 mal genommen, d. h. mit 4 multiplicirt (wie aus 17, 5 — 7 erhellt). Man erhält dann nämlich $\frac{3}{4:4}$ d. i. $\frac{3}{1}$ oder 3, wie vorher.

4. Aendert sich das Verfahren, wenn eine

ganze Zahl mit einem Bruche multiplicirt werden soll?

Es ändert sich nicht im Geringsten; denn (nach 8, 44. 45) kann man den Multiplicandus zum Multiplicator, und diesen zu jenen machen, ohne daß das Product geändert wird. Es ist also einerlei, ob ich eine ganze Zahl mit einem Bruche, oder den Bruch mit der ganzen Zahl multiplicire. In beiden Fällen erscheint einerlei Product. $8 \times \frac{3}{4}$ ist eben so viel, als $\frac{3}{4} \times 8$, nämlich $\frac{3 \cdot 8}{4}$ d. i. $\frac{24}{4}$ oder 6.

5. Wie werden gemischte Zahlen mit ganzen Zahlen multiplicirt?

Man multiplicirt mit der ganzen Zahl zuerst den Bruch der gemischten Zahl, und dann die dabeistehende ganze Zahl. Liegen in dem Producte der ganzen Zahl in den Bruch Ganze, so zieht man sie heraus, und addirt sie zu dem Producte der ganzen Zahlen. Z. B. wenn gegeben ist $2\frac{3}{4} \times 5$; so multiplicirt man zuerst den Bruch $\frac{3}{4}$ mit 5, giebt $\frac{15}{4}$ oder $3\frac{3}{4}$; dann multiplicirt man die ganze Zahl 2 ebenfalls mit 5, giebt 10, und hierzu die 3 Ganzen, die im ersten Producte lagen, giebt 13; und das ganze Product heißt nun $13\frac{3}{4}$.

Wenn eine ganze Zahl durch eine gemischte Zahl multiplicirt werden soll, so bleibt das Verfahren dasselbe; denn man kann ja die ganze Zahl immer als Multiplicator, und die gemischte Zahl als Multiplicanden ansehen, ohne daß das Product geändert wird. $8 \times 3\frac{1}{2}$ ist eben so viel als $3\frac{1}{2} \times 8$, nämlich 28.

6. Wie werden Brüche mit Brüchen multiplicirt?

Wenn ein Bruch mit einem Bruche multiplicirt werden soll, so multiplicire man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner. Den auf diese Art neu entstandenen Bruch kürze man so viel als möglich ab. Sollte z. B. $\frac{3}{4}$ mit $\frac{4}{7}$ multiplicirt werden, so multiplicire man die beiden Zähler, und eben so die beiden Nenner der Brüche, so ist der neue Bruch das Product derselben, nämlich $\frac{3.4}{4.7}$ d. i. $\frac{12}{28}$ oder abgekürzt $\frac{3}{7}$. Eben so ist $\frac{5}{6} \times \frac{2}{3} = \frac{5.2}{6.3}$ d. i. $\frac{10}{18}$ oder $\frac{5}{9}$. Auf gleiche Art werden 3 und mehrere Brüche mit einander multiplicirt. Man multiplicirt nämlich alle Zähler, und alle Nenner (nach 8, 40); so ist der neue Bruch das Product aller Brüche. Z. B. $\frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \times \frac{6}{7} \times \frac{1}{4} = \frac{1.3.6.1}{2.5.7.4}$ d. i. $\frac{18}{280}$ oder abgekürzt $\frac{9}{140}$.

7. Kommt hier etwas darauf an, ob die Brüche, welche multiplicirt werden sollen, einerlei Nenner oder verschiedene haben?

Hierauf kommt gar nichts an. Die Brüche, welche multiplicirt werden sollen, mögen von einerlei oder verschiedener Benennung seyn, so multiplicirt man immer die Zähler mit den Zählern, und die Nenner mit den Nennern.

8. Wie läßt sich die Richtigkeit dieses Verfahrens darthun?

Die Richtigkeit dieses Verfahrens geht aus Folgendem hervor: Multipliciren heißt eine Zahl so oft nehmen, als eine andere Einheiten hat; soll nur ein Bruch mit einem andern Bruche multipli-

cirt werden, so sind in keinem Factor ganze Einheiten vorhanden; z. B. wenn $\frac{4}{5}$ mit $\frac{2}{3}$ multiplicirt werden soll, so heißt das, der Bruch $\frac{4}{5}$ soll $\frac{2}{3}$ mal genommen, d. h. der Bruch $\frac{4}{5}$ soll in 3 gleiche Theile getheilt und 2 dieser Theile genommen werden. Durch die Multiplication des Nenners 5 durch den Nenner 3 wird nun der Bruch $\frac{4}{5}$ 3 mal kleiner, oder in 3 gleiche Theile getheilt, und durch die Multiplication des Zählers 4 mit dem Zähler 2 wird der gefundene 3te Theil des Bruchs $\frac{4}{5}$ 2mal genommen; welches der Zweck der Arbeit war.

9. Was ist in Bezug auf die Größe des Products zweier Brüche zu merken?

Es ist zu merken, daß das Product zweier Brüche nicht, wie das Product zweier ganzen Zahlen (8, 16) allemal größer seyn muß, als der Multiplicandus; sondern vielmehr kleiner, als dieser.

10. Worin liegt der Grund hiervon?

Dies kömmt daher, weil, wenn z. B. $\frac{3}{4}$ mit $\frac{2}{3}$ multiplicirt wird, der Bruch $\frac{3}{4}$ nicht ein ganzes mal genommen wird, sondern nur $\frac{2}{3}$ mal. Nothwendig muß daher das Product kleiner seyn, als $\frac{3}{4}$; und dies ist es auch; denn $\frac{6}{12}$, oder $\frac{2}{4}$ ist kleiner, als $\frac{3}{4}$. Eben so muß das Product auch kleiner seyn, als der Multiplicator, hier also kleiner als $\frac{2}{3}$; denn man kann ja unbeschadet der Größe des Products $\frac{2}{3}$ zum Multiplicanden und $\frac{3}{4}$ zum Multiplicator machen, wo sich dann der vorige Beweis wiederholen läßt. Man kann daher sagen: das Product zweier Brüche muß je-

desmal kleiner seyn, als jeder der beiden Factoren. Die Brüche müssen aber dann ächte Brüche seyn. Wird aber eine ganze Zahl, oder ein unächter Bruch mit einem ächten Bruche multiplicirt, so muß das Product wenigstens kleiner seyn, als der Multiplicandus. Denn $8 \times \frac{2}{3}$ heißt ja nichts anders, als 8 soll nicht ein ganzes mal, sondern nur $\frac{2}{3}$ mal genommen werden; also kann das Product weder größer als 8, noch 8, sondern es muß kleiner seyn, als 8; $8 \times \frac{2}{3} = \frac{8.2}{3} = \frac{16}{3}$ d. i. $5\frac{1}{3}$. Dasselbe gilt wenn der Multiplicandus ein Afterbruch, oder eine gemischte Zahl ist.

11. Wie werden gemischte Zahlen mit Brüchen multiplicirt?

Man kann hier auf zweierlei Art verfahren:

1) Man verwandelt die gemischte Zahl in einen unächten Bruch, und multiplicirt dann Zähler mit Zähler, und Nenner mit Nenner. Z. B. $3\frac{1}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{13}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{13.4}{4.5}$ d. i. $\frac{52}{20}$ oder $2\frac{12}{20}$ oder $2\frac{3}{5}$.

2) Man multiplicirt zuerst mit dem gegebenen Bruche die ganze Zahl, und dann den bei derselben stehenden Bruch; die beiden Producte werden dann addirt. Z. B. $3\frac{1}{4} \times \frac{4}{5}$.

3 multiplicirt mit $\frac{4}{5}$ giebt $\frac{12}{5}$
$\frac{1}{4}$ = = = $\frac{4}{20}$ od. $\frac{1}{5}$ } addirt

$\frac{13}{5}$ od. $2\frac{3}{5}$, wie vorher.

12. Wie werden endlich gemischte Zahlen mit gemischten Zahlen multiplicirt?

Dies kann ebenfalls auf zweierlei Art geschehen:

1) Man verwandele die gemischten Zahlen, welche multiplicirt werden sollen, in unächte Brüche, und multiplicire diese dann, nämlich Zähler mit Zähler, und Nenner mit Nenner. Z. B. wenn gegeben ist $3\frac{1}{2} \times 2\frac{2}{4}$, so verwandelt man sowohl den Multiplicanden, als auch den Multiplicator in unächte Brüche. Man erhält dann: $\frac{7}{2} \times \frac{11}{4}$ d. i. $\frac{7 \cdot 11}{2 \cdot 4}$ oder $\frac{77}{8}$ d. i. $9\frac{5}{8}$.

2) Man multiplicire zuerst den ganzen Multiplicanden mit dem Bruche des Multiplicators; und dann auch mit der ganzen Zahl desselben, ziehe überall, wo es sich thun läßt, die Ganzen heraus, und addire die beiden einzelnen Producte. Z. B. $3\frac{1}{2} \times 2\frac{3}{4}$. Zuerst multiplicire man $3\frac{1}{2}$ mit $\frac{3}{4}$, giebt $\frac{9}{4} + \frac{3}{8}$ oder $2\frac{1}{4} + \frac{3}{8}$ d. i. $2\frac{2}{8} + \frac{3}{8}$ oder $2\frac{5}{8}$. Sodann multiplicire man $3\frac{1}{2}$ mit der ganzen Zahl des Multiplicators, mit 2, giebt $6\frac{2}{2}$ oder 7. Diese beiden einzelnen Producte addire man nun, so erhält man das Product der gegebenen gemischten Zahlen, nämlich $9\frac{5}{8}$, wie nach der ersten Art. — Man erwäge noch folgendes Beispiel:

$4\frac{2}{7}$
$6\frac{3}{4}$

$\frac{12}{4} + \frac{6}{28}$ den Multiplicanden mit $\frac{3}{4}$ multiplicirt
$24 + \frac{12}{7}$ = = = = = 6 = =

$\frac{12}{4} + \frac{6}{28}$ ist gleich $3 + \frac{6}{28}$ oder gleich $3\frac{3}{14}$
$24 + \frac{12}{7}$ ist gleich $24 + 1\frac{5}{7}$ oder $25\frac{5}{7}$ oder $25\frac{10}{14}$ } addirt

$28\frac{13}{14}$ Product.

Die erstere Art, gemischte Zahlen zu multipliciren, verdient unstreitig den Vorzug vor der zweiten, und ist besonders Anfängern zu empfehlen, weil nicht so leicht Irrungen vorkommen können, als bei der zweiten Art.

13. Wie vielerlei Fälle kommen bei der Division in Brüchen vor?

Man kann 4 verschiedene Fälle unterscheiden. Denn entweder soll

1) ein Bruch oder eine gemischte Zahl durch eine ganze Zahl dividirt werden; oder
2) ein Bruch durch einen Bruch oder durch eine gemischte Zahl; oder
3) eine gemischte Zahl durch einen Bruch oder durch eine gemischte Zahl.
4) eine ganze Zahl durch einen Bruch oder durch eine gemischte Zahl; oder

14. Wie wird ein Bruch durch eine ganze Zahl dividirt?

Dies geschieht dadurch, daß man den Zähler des Bruchs mit der ganzen Zahl dividirt, und den Nenner ungeändert läßt; oder dadurch, daß man den Nenner des Bruchs mit der ganzen Zahl multiplicirt, und den Zähler unverändert läßt. Das erste thut man nur dann, wenn sich der Zähler durch die ganze Zahl ohne Rest dividiren läßt. Ist z. B. gegeben $\frac{8}{11}$: 4, so dividire man entweder den Zähler 8 durch 4, und lasse den Nenner ungeändert, giebt $\frac{2}{11}$; oder man multiplicire den Nenner 11 mit 4, und lasse den Zähler ungeändert, giebt $\frac{8}{44}$ oder abgekürzt $\frac{2}{11}$.

15. Woraus geht die Richtigkeit dieses Verfahrens hervor?

Sie geht aus Folgendem hervor: Wenn ein Bruch durch eine ganze Zahl dividirt werden soll, so heißt das, man soll ihn in so viele gleiche Theile theilen, als die ganze Zahl anzeigt, und einen davon nehmen; oder mit andern Worten, man soll den Bruch so vielmal kleiner machen, als die ganze Zahl Einheiten hat. Dies geschieht aber (nach 17, 8 — 11) dadurch, daß man entweder bei unverändertem Nenner den Zähler mit der ganzen Zahl dividirt, oder bei unverändertem Zähler den Nenner mit dieser ganzen Zahl multiplicirt.

16. Wie wird eine gemischte Zahl durch eine ganze Zahl dividirt?

Man verwandelt die gemischte Zahl in einen unächten Bruch, und verfährt ganz wie vorher. Z. B. $4\frac{1}{2} : 3 = \frac{9}{2} : 3 = \frac{9}{2.3}$ d. i. $\frac{9}{6}$ oder $1\frac{3}{6}$ oder $1\frac{1}{2}$.

17. Wie verfährt man, wenn ein Bruch durch einen andern Bruch dividirt werden soll?

Wenn ein Bruch durch einen andern Bruch dividirt werden soll; so multiplicire man den Zähler des Dividenden mit dem Nenner des Divisors, und den Nenner des Dividenden mit dem Zähler des Divisors; oder kürzer: man kehre den Divisor um, und multiplicire nun damit den Dividenden, wie es bei der Multiplication gelehrt worden ist. Z. B. wenn $\frac{4}{7}$ durch $\frac{3}{8}$ dividirt werden soll, so kehre man den Divisor $\frac{3}{8}$ um, d. h. man mache den Nenner zum Zähler, und den Zähler zum Nenner, nämlich $\frac{8}{3}$. Mit diesem umgekehrten Divisor

multiplicire man nun den Dividenden $\frac{4}{7}$ nach den Regeln der Multiplication; nämlich $\frac{4}{7} \cdot \frac{8}{3} = \frac{4 \cdot 8}{7 \cdot 3}$ d. i. $\frac{32}{21}$ oder $1\frac{11}{21}$, dieses ist also der Quotient; oder mit Worten ausgesprochen: $\frac{3}{8}$ liegt in dem Bruche $\frac{4}{7}$ 1 mal und noch $\frac{11}{21}$ mal. Eben so ist:

$\frac{3}{4} : \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{1} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 1}$ d. i. $\frac{6}{4}$ oder $1\frac{1}{2}$.

18. Woraus gehet die Richtigkeit dieses Verfahrens hervor?

Die Richtigkeit dieses Verfahrens wird aus folgender Betrachtung einleuchten:

Eigentlich untersucht man, wie oft der Divisor in dem Dividendus enthalten ist. Hätten nun die Brüche einerlei Nenner, so brauchte man nur zu untersuchen, wie oft der Zähler des Divisors in dem Zähler des Dividenden enthalten ist. Z. B. $\frac{6}{8} : \frac{3}{8}$ heißt; es soll $\frac{6}{8}$ durch $\frac{3}{8}$ dividirt werden, oder: man soll untersuchen, wie oft der Bruch $\frac{3}{8}$ in dem Bruche $\frac{6}{8}$ enthalten ist. Da die Brüche einerlei Nenner haben, so hat man offenbar nichts weiter zu thun, als zu untersuchen, wie oft der Zähler 3, des Divisors $\frac{3}{8}$ in dem Zähler 6 des Dividenden $\frac{6}{8}$ enthalten ist. (Denn so vielmal muß auch der ganze Divisor im ganzen Dividenden enthalten seyn). 6 : 3 giebt 2; folglich ist der Zähler des Divisors 2 mal im Zähler des Dividenden enthalten; also muß auch der ganze Divisor $\frac{3}{8}$ im ganzen Dividenden $\frac{6}{8}$ 2 mal enthalten seyn; oder mit andern Worten: $\frac{6}{8}$ durch $\frac{3}{8}$ muß den Quotienten 2 geben. Deutlicher wird dies, wenn man fragt: wie viel mal sind 3 Achtel in 6 Achteln enthalten? Die Antwort wird seyn: 2 mal.

Daſſelbe erhält man aber auch nach der gegebenen Regel, wenn man nämlich den Diviſor umkehrt, und nun damit den Dividenden multiplicirt; nämlich $\frac{6}{8} : \frac{3}{8} = \frac{6}{8} \cdot \frac{8}{3} = \frac{6 \cdot 8}{8 \cdot 3}$ d. i. $\frac{48}{24}$ d. i. 2.

Hätten aber die Brüche verſchiedene Nenner, ſo müßten ſie erſt auf gleiche Benennung gebracht werden. Dann würde wie vorher verfahren. Z. B. wenn gegeben wäre $\frac{8}{9} : \frac{2}{5}$, ſo müßte man dieſe Brüche erſt unter einerlei Benennung bringen. Man erhielte dann $\frac{40}{45} : \frac{18}{45}$. Man braucht dann nur den Zähler des Dividenden, nämlich 40, durch den Zähler des Diviſors, nämlich 18, zu dividiren, ſo erhält man den Quotienten. 40 : 18 iſt aber $2\frac{4}{18}$ oder $2\frac{2}{9}$; ſo viel mal liegt alſo der Diviſor im Dividenden. Denſelben Quotienten erhält man aber auch auf einem kürzern Wege, wenn man nämlich nach der gegebenen Regel den Dividenden mit dem umgekehrten Diviſor multiplicirt; nämlich:

$$\frac{8}{9} : \frac{2}{5} = \frac{8}{9} \cdot \frac{5}{2} = \frac{8 \cdot 5}{9 \cdot 2} \text{ d. i. } \frac{40}{18}$$

Das iſt $2\frac{4}{18}$ oder $2\frac{2}{9}$, wie vorher.

Hierdurch iſt alſo jene Regel hinlänglich gerechtfertigt.

19. Bei der Diviſion in ganzen Zahlen war es nothwendig, um die Diviſion wirklich verrichten zu können, daß der Diviſor nicht größer war, als der Dividendus: findet bei der Diviſion in Brüchen dieſe Bedingung auch Statt?

Nein! Bei der Diviſion in Brüchen kann die Diviſion verrichtet werden, wenn auch der Diviſor größer ſeyn ſollte, als der Dividendus. Z. B

$\frac{2}{11} : \frac{3}{4} = \frac{2}{11} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2 \cdot 4}{11 \cdot 3} = \frac{8}{33}$. Der Quotient ist also $\frac{8}{33}$; oder mit Worten ausgedrückt, der Bruch $\frac{3}{4}$ liegt in dem Bruche $\frac{2}{11}$ nicht ein ganzes mal, sondern nur $\frac{8}{33}$ mal.

20. Was ist bei der Division in Brüchen von dem Quotienten zu merken?

Es ist zu merken, daß der Quotient allemal größer als 1 seyn muß, wenn der Divisor kleiner ist, als der Dividendus. Man darf sich daher nicht wundern, wenn man oft bei der Division eines Bruches durch einen andern eine ganze Zahl zum Quotienten erhält. Der Grund hiervon liegt darin, daß ein kleinerer Bruch in einem größern, immer mehr als 1 mal, und wenn der Divisor gegen den Dividendus sehr klein ist, sehr vielmal liegen kann. So ist z. B. der Bruch $\frac{1}{4}$ in $\frac{3}{4}$ 3mal enthalten; und der Bruch $\frac{1}{100}$ in $\frac{3}{4}$ gar 75 mal; denn $\frac{3}{4} : \frac{1}{100} = \frac{3}{4} \cdot \frac{100}{1} = \frac{3 \cdot 100}{4 \cdot 1}$ d. i. $\frac{300}{4}$ oder 75. — Hingegen wird der Quotient immer ein ächter Bruch seyn, wenn der Divisor größer ist als der Dividendus, weil der Divisor dann im Dividendus nicht ein einzigesmal liegen kann. Z. B. bei $\frac{1}{4} : \frac{3}{4}$ kann der Quotient weder 1 noch größer als 1 seyn, weil $\frac{3}{4}$ in $\frac{1}{4}$ offenbar nicht ein einziges mal, sondern weniger, als einmal enthalten ist. Verrichtet man die Division, wie gelehrt worden, so erhält man zum Quotienten den echten Bruch $\frac{1}{3}$; nämlich: $\frac{1}{4} : \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1 \cdot 4}{4 \cdot 3} = \frac{4}{12}$ d. i. $\frac{1}{3}$. Wir wissen nun, daß $\frac{3}{4}$ in $\frac{1}{4}$ nur ein drittheil mal liegt.

21. Wie wird ein Bruch durch eine gemischte Zahl dividirt?

Man verwandelt die gemischte Zahl in einen unächten Bruch, und verfahre wie vorher. Der Quotient muß hier allemal ein ächter Bruch seyn, weil der Divisor allemal größer ist, als der Dividendus. Z. B.

$\frac{3}{4} : 2\frac{1}{2} = \frac{3}{4} : \frac{5}{2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 5}$ d. i. $\frac{6}{20}$ oder $\frac{3}{10}$

22. Wie wird eine gemischte Zahl durch einen Bruch, oder durch eine gemischte Zahl dividirt?

Man verwandelt, wenn eine gemischte Zahl durch einen Bruch dividirt werden soll, den Dividendus in einen Afterbruch, und verfährt, wie vorher. Z. B. $3\frac{4}{5} : \frac{5}{7} = \frac{19}{5} : \frac{5}{7} = \frac{19}{5} \cdot \frac{7}{5} = \frac{19 \cdot 7}{5 \cdot 5} = \frac{133}{25} = 5\frac{8}{25}$. Ist der Divisor auch eine gemischte Zahl, so verwandelt man ihn auch in einen unächten Bruch, und verfährt eben so; z. B. $6\frac{7}{9} : 2\frac{2}{3} = \frac{61}{9} : \frac{8}{3} = \frac{61}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{61 \cdot 3}{9 \cdot 8}$ d. i. $\frac{183}{72}$ d. i. $2\frac{39}{72}$ oder $2\frac{13}{24}$.

23. Wie wird endlich eine ganze Zahl durch einen Bruch, oder durch eine gemischte Zahl dividirt?

Soll eine ganze Zahl durch einen Bruch dividirt werden, so verwandelt man die ganze Zahl in einen Bruch, indem man 1 als Nenner unterschreibt (20, 2); und dividirt dann, wie es bei Brüchen gelehrt worden ist. Z. B. $4 : \frac{2}{5} = \frac{4}{1} : \frac{2}{5} = \frac{4}{1} \cdot \frac{5}{2} = \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = \frac{20}{2}$ d. i. 10. — Soll aber eine ganze Zahl durch eine gemischte Zahl dividirt werden, so verwandele man die ganze Zahl durch Unterschreibung des Nenners 1 in einen Bruch und

die gemischte Zahl in einen Afterbruch, und verrichte dann die Division. Z. B. $7 : 2\frac{1}{3} = \frac{7}{1} : \frac{7}{3} = \frac{7}{1} \cdot \frac{3}{7} = \frac{21}{7}$ d. i. 3.

24. Was heißt den Bruch eines Bruchs angeben?

Es heißt nichts anders, als die Multiplication zweier Brüche verrichten; z. B. $\frac{2}{7}$ des Bruchs $\frac{1}{2}$ angeben, heißt nichts anders, als die Brüche mit einander multipliciren. Denn $\frac{2}{7}$ des Bruchs $\frac{1}{2}$ angeben heißt, den Bruch $\frac{1}{2}$ in gleiche Theile theilen, und 2 dieser Theile nehmen; oder: $\frac{1}{2}$ mit $\frac{2}{7}$ multipliciren.

25. Was ist von den zusammengesetzten, oder sogenannten gebrochenen Brüchen (Doppelbrüchen) zu merken?

Man merke von ihnen folgendes: Es sind, wie früher erwähnt worden, solche Brüche, wo der Zähler, oder der Nenner, oder beide zugleich wieder aus Brüchen, oder aus gemischten Zahlen besteht. Dergleichen Brüche kommen auch zuweilen in ganz gewöhnlichen Rechnungen vor. Denn so sagen wir ja selbst im gemeinen Leben: ein halbes Viertel, ein halbes Achtel u. s. w. Diese Brüche werden so geschrieben:

$$\frac{\frac{1}{2}}{4} \quad , \quad \frac{\frac{1}{2}}{8} .$$

Der Zähler ist hier ein Bruch ($\frac{1}{2}$), und der Nenner eine ganze Zahl (im ersten Bruche 4; im zweiten 8). Man muß dann den Zähler vom Nenner durch einen größern Querstrich unterscheiden. Dergleichen gebrochene Brüche sind noch z. B.

$\frac{1\frac{3}{4}}{6}$ oder $\frac{\frac{7}{4}}{6}$; $\frac{9}{8\frac{2}{3}}$ oder $\frac{9}{\frac{26}{3}}$;

$\frac{7\frac{1}{3}}{5\frac{1}{8}}$ oder $\frac{\frac{7}{3}}{\frac{41}{8}}$.

Alle diese Brüche lassen sich auf gewöhnliche Brüche zurückführen, wenn man sie als Divisionsausdrücke also den Zähler als Dividendus, und den Nenner als Divisor betrachtet (welches nach 16, 5 . 6 geschehen kann), und dann nach den obigen Regeln der Division verfährt. Z. B.

$\frac{1\frac{3}{4}}{6}$ oder $\frac{\frac{7}{4}}{6}$ ist so viel, als $\frac{7}{4} : 6$ d. i. $\frac{7}{24}$.

$\frac{9}{8\frac{2}{3}}$ oder $\frac{9}{\frac{26}{3}}$ = = = = $9 : \frac{26}{3}$ d. i. $\frac{27}{26}$

$\frac{2\frac{1}{3}}{5\frac{1}{8}}$ oder $\frac{\frac{7}{3}}{\frac{41}{8}}$ = = = = $\frac{7}{3} : \frac{41}{8}$ d. i. $\frac{56}{123}$.

Drei und zwanzigstes Kapitel.

Von benannten Brüchen.

1. Was versteht man unter einem benannten Bruche?

Unter einem benannten Bruche versteht man einen solchen, wo die Einheit, von welcher der Bruch einen oder mehrere Theile anzeigt, benannt ist; so ist z. B. $\frac{2}{3}$ Thaler ein benannter Bruch; da die Einheit, welche in 3 gleiche Theile getheilt, und von welchen Theilen 2 genommen werden sollen, eine benannte Zahl, nämlich 1 Thlr. ist.

Eben so sind $\frac{3}{7}$ Ellen; $\frac{8}{11}$ Pfd.; $\frac{3}{17}$ Gr. benannte Brüche.

2. Wie kann man einen solchen benannten Bruch, wenn er selbst sich noch nicht auf die kleinste Gattung bezieht, durch Einheiten kleinerer Gattungen ausdrücken?

Man multiplicirt den Zähler des gegebenen Bruchs durch die Zahl, welche anzeigt, wie viele Einheiten der nächst kleinern Gattung in einer Einheit derjenigen Gattung, auf welche sich der Bruch bezieht, enthalten sind; und dividirt dieses Product durch den Nenner.

3. Wie läßt sich dies durch ein Beispiel deutlich machen?

Wenn man z. B. den Bruch $\frac{3}{4}$ Thaler durch Einheiten der nächst niedrigen Gattung, also durch Groschen, ausdrücken will; oder mit andern Worten, wenn man untersuchen will, wie viel $\frac{3}{4}$ Thaler Groschen sind, so multiplicire man den Zähler 3 mit derjenigen Zahl, welche anzeigt, wie viel Groschen auf einen Thaler gehen, also mit 24, giebt 72. Dieses Product dividire man durch den Nenner 4, so erhält man 18. $\frac{3}{4}$ Thaler sind also so viel, als 18 Groschen. — Man beachte noch folgende Beispiele:

$\frac{4}{7}$ Thlr. $= \frac{4 \cdot 24}{7}$ Gr. $= \frac{96}{7}$ Gr. $= 13\frac{5}{7}$ Gr.

$\frac{17}{96}$ Pfd. $= \frac{17 \cdot 32}{96}$ Loth $= \frac{544}{96}$ Loth $= 5\frac{2}{3}$ Loth.

$\frac{7}{22}$ Std. $= \frac{7 \cdot 60}{22}$ Minut. $= \frac{420}{22}$ M. $= 19\frac{1}{11}$ M.

4. Was muß man thun, wenn nach diesem Verfahren noch ein Bruch übrig bleibt, wie z. B. in dem ersten Beispiele?

Man fängt dann die Arbeit wieder von vorn an, d. h. man verwandelt den gebliebenen Bruch in Einheiten der nächst niedrigen Gattung, wenn überhaupt eine solche niedrigere Gattung noch vorhanden ist. Z. B. wir fanden oben im ersten Beispiele $\frac{4}{7}$ Thlr. = $13\frac{5}{7}$ Gr., die $\frac{5}{7}$ Gr. verwandele man nun, wie gelehrt worden, in Pfennige, nämlich $\frac{5}{7}$ Gr. = $\frac{5 \cdot 12}{7}$ Pf. = $\frac{60}{7}$ Pf. = $8\frac{4}{7}$ Pf. und $\frac{4}{7}$ Thlr. ist nun eben so viel als 13 Gr. $8\frac{4}{7}$ Pf. Eben so war im zweiten Beispiele $\frac{17}{96}$ Pfd. = $5\frac{2}{3}$ Loth. Die $\frac{2}{3}$ Loth verwandle man nun in Quentchen; nämlich $\frac{2}{3}$ Loth = $\frac{2 \cdot 4}{3}$ Qutch. = $\frac{8}{3}$ Q. = $2\frac{2}{3}$ Qutch.; und $\frac{17}{96}$ Pfd. sind also nun gleich $5\frac{2}{3}$ Loth, oder gleich 5 Loth $2\frac{2}{3}$ Quentchen.

5. Wenn es sich aber ereignen sollte, daß man durch das angegebene Verfahren noch keine Einheiten der nächst niedrigen Gattung erhält, sondern wieder einen Bruch: was ist da zu thun?

Dann fängt man wieder von vorn an, und verwandelt den gefundenen Bruch der niedrigern Gattung in Einheiten einer noch niedrigern Gattung, wenn eine solche überhaupt noch vorhanden ist. Z. B. wenn man den Bruch $\frac{2}{240}$ Stunden in Einheiten der nächst niedrigen Gattung, also in Minuten verwandeln sollte, so würde man keine ganzen Minuten erhalten, sondern wieder einen Bruch; nämlich: $\frac{2}{240}$ Stunden = $\frac{2 \cdot 60}{240}$ Min. = $\frac{120}{240}$ Min. = $\frac{1}{2}$ Minute. Nun verwandele man diesen neuen Bruch $\frac{1}{2}$ Min. in Einheiten der nächst niedrigen Gattung, also in Secunden; nämlich: $\frac{1}{2}$ Min. = $\frac{1 \cdot 60}{2}$ Sec. = $\frac{60}{2}$ Sec. =

30 Sec.; $\frac{2}{240}$ Stunden sind also so viel, als 30; Secunden.

6. Wir haben bis jetzt gesehen, wie ein benannter Bruch durch Einheiten einer niedrigern Gattung, als diejenige ist, auf welche sich der Bruch bezieht, ausgedrückt werden kann: auf welche Art kann man nun umgekehrt eine ganze benannte Zahl als einen Bruch der nächst höhern Gattung vorstellen?

Soll man eine ganze benannte Zahl in einen Bruch der nächst höhern Gattung verwandeln, so hat man weiter nichts zu thun, als der ganzen Zahl diejenige Zahl als Nenner unterzuschreiben, welche anzeigt, wie viel Einheiten dieser Gattung in einer Einheit der größern enthalten sind.

7. Wie läßt sich dies durch ein Beispiel deutlich machen?

Wenn man z. B. 7 Gr. in einen Bruch vom Thaler verwandeln will, so schreibt man blos unter die ganze Zahl 7 diejenige Zahl, welche anzeigt, wie viele Groschen auf einen Thaler gehen, also 24., 7 Gr. sind also $\frac{7}{24}$ Thlr. Eben so sind 16 Loth $\frac{16}{32}$ Pfd. oder abgekürzt $\frac{1}{2}$ Pfd.

8. Wie wird ein benannter Bruch in einen Bruch einer höhern Gattung verwandelt?

Dies geschieht ganz auf ähnliche Art, als wenn eine ganze benannte Zahl in einen Bruch der höhern Gattung verwandelt wird. Man multiplicirt nämlich den Nenner des gegebenen Bruchs mit derjenigen Zahl, welche anzeigt, wie viel Einheiten derjenigen Gattung, auf welche sich der gege-

bene Bruch bezieht, auf eine Einheit der höhern Gattung gehen. Z. B. wenn $\frac{2}{3}$ Gr. in einen Thalerbruch verwandelt werden sollte, so müßte man den Nenner 3 mit 24 multipliciren, weil 24 Gr. 1 Thaler machen. Man erhielt $\frac{2}{72}$ Thlr. oder abgekürzt $\frac{1}{36}$ Thlr., $\frac{2}{3}$ Gr. sind also so viel als $\frac{1}{36}$ Thaler. Eben so wäre $\frac{2}{7}$ Pfd. gleich $\frac{2}{7.110}$ Ctr. d. i. $\frac{2}{770}$ Ctr. oder abgekürzt $\frac{1}{385}$ Ctr.

9. Wie verfährt man, wenn eine ganze benannte Zahl, die sich auf Einheiten der niedrigsten Gattung bezieht, in einen Bruch der höchsten Gattung verwandelt werden soll?

Man verwandelt dann die ganze Zahl erst in einen Bruch der nächst höhern Gattung; diesen so gefundenen Bruch wieder nach dem vorhergehenden in einen Bruch der nächst höhern Gattung u. s. f., bis man auf die verlangte höchste Gattung kommt. Z. B. wenn 5 Pfennige durch einen Thalerbruch ausgedrückt werden sollten, so verwandle man diese 5 Pfennige erst in einen Groschenbruch; und dann diesen Groschenbruch in einen Thalerbruch; nämlich:

5 Pf. $= \frac{5}{12}$ Gr. $= \frac{5}{12.24}$ Thlr. $= \frac{5}{288}$ Thlr. Eben so:

3 Q. $= \frac{3}{4}$ Loth $= \frac{3}{4.32}$ Pfd. $= \frac{3}{128}$ Pfd. $\frac{3}{128.110}$ C. $= \frac{3}{14080}$ Ctr.

Auf ähnliche Art verwandelt man einen Bruch, der sich auf die niedrigste Gattung bezieht, in einen Bruch von der höchsten Gattung. Man verwandelt ihn nämlich zuerst in einen Bruch der nächst höhern Gattung; diesen wieder in einen

Bruch der nächst höhern, u. s. f., bis man zu der verlangten höchsten Gattung kommt. Z. B.

$\frac{7}{8}$ Pf. $= \frac{7}{8.12}$ Gr. $= \frac{7}{96}$ Gr. $= \frac{7}{96.24}$ Thlr. $= \frac{7}{2304}$ Thlr.

10. Wie kann man mehrere ganze Zahlen verschiedener Gattungen in einen Afterbruch der höchsten vorhandenen Gattung verwandeln?

Man kann dies dadurch, daß man zuerst die kleinste Gattung in einen Bruch der nächst höhern Gattung verwandelt, diesen Bruch zu den vorhandenen Einheiten dieser nächst höhern Gattung hinzufügt; diese so erhaltene gemischte Zahl in einen Afterbruch verwandelt, diesen Afterbruch durch einen Bruch der nächst höhern Gattung ausdrückt, und so fort fährt, bis man zu der höchsten Gattung gekommen ist. Z. B. wenn man 3 Thlr. 7 Gr. in einen Afterbruch vom Thaler verwandeln sollte, so müßte man die 7 Gr. in einen Thalerbruch verwandeln, giebt $\frac{7}{24}$ Thlr., diesen Bruch zu den vorhandenen 3 Thlr. hinzufügen, giebt $3\frac{7}{24}$ Thlr., und diese gemischte Zahl in einen Afterbruch verwandeln, giebt $\frac{79}{24}$ Thlr. Eben so wird man nun folgende Beispiele verstehen:

1) 5 Stunden 19 Min. $= 5\frac{19}{60}$ St. $= \frac{319}{60}$ Stunden.

2) 8 Pfd. 20 Loth 3 Qutch. $=$ 8 Pfd. $20\frac{3}{4}$ Loth $=$ 8 Pfd. $\frac{83}{4}$ Loth $= 8\frac{83}{128}$ Pfd. $= \frac{1107}{128}$ Pfd.

3) 7 Thlr. 8 Gr. 2 Pf. $=$ 7 Thlr. $8\frac{1}{6}$ Gr. $=$ 7 Thlr. $\frac{49}{6}$ Gr. $= 7\frac{49}{144}$ Thlr. $= \frac{1057}{144}$ Thlr.

4) 8 Thlr. — Gr. 1 Pf. $=$ 8 Thlr. $\frac{1}{12}$ Gr. $=$ 8 $\frac{1}{288}$ Thlr. $= \frac{2305}{288}$ Thlr.

5) 3 Ctr. 4 Pfd. — Loth 1 Quch. = 3 Ctr. 4 Pfd. $\frac{1}{4}$ Loth.
= 3 Ctr. $4_{\frac{1}{128}}$ Pfd. = 3 Ctr. $\frac{5}{1}\frac{1}{2}\frac{3}{8}$ Pfd. =
$3_{\frac{5}{140}\frac{13}{80}}$ Ctr. = $\frac{427}{140}\frac{53}{80}$ Ctr.

Anmerkung. Da es, wie später gezeigt werden wird, oft von großem Vortheil ist, dergleichen Verwandlungen vorzunehmen, so müssen sich Anfänger darin auf alle nur mögliche Art üben.

11. Was hat man zu thun, wenn in einer Rechnung Brüche vorkommen, die sich auf verschiedene Einheiten beziehen?

Wenn dergleichen Brüche, die sich auf verschiedene Einheiten beziehen, in einer Rechnung vorkommen, so muß man sie erst auf einerlei Gattung bringen, ehe man die Rechnung mit ihnen vornehmen kann.

12. Wie läßt sich dies durch ein Beispiel deutlich machen?

Wenn z. B. $\frac{3}{4}$ Thlr. und $\frac{3}{4}$ Gr. addirt werden sollen, so kann man die Addition nicht unmittelbar verrichten, weil die Brüche sich auf verschiedene Gattungen beziehen, also ungleichartig sind. Um sie aber addiren zu können, muß man sie erst beide auf einerlei Gattung bringen. Hier kann man nun auf zweierlei Art verfahren:

1) Man verwandelt $\frac{3}{4}$ Thlr. in Groschen und addirt sie zu $\frac{3}{4}$ Gr. Nämlich $\frac{3}{4}$ Thlr. = $\frac{3.24}{4}$ Gr. = 18 Gr.; hierzu $\frac{3}{4}$ Gr. addirt, giebt $18\frac{3}{4}$ Gr.

2) Man verwandelt $\frac{3}{4}$ Gr. in einen Thalerbruch, und addirt sodann; nämlich: $\frac{3}{4}$ Gr. = $\frac{3}{4.24}$ Thlr. = $\frac{3}{96}$ Thlr.; und $\frac{3}{4}$ Thlr + $\frac{3}{4}$ Gr. ist nun eben so viel, als $\frac{3}{4}$ Thlr. + $\frac{3}{96}$ Thlr.

bringt man diese Brüche auf einerlei Benennung, so erhält man diese Brüche auf einerlei Benennung, so erhält man $\frac{72}{96}$ Thlr. + $\frac{3}{96}$ Thlr. $= \frac{72+3}{96}$ Thlr. $= \frac{75}{96}$ Thlr., daß diese Summe mit der vorhin gefundenen ganz gleich ist, sieht man leicht; denn $\frac{75}{4}$ Gr. $= \frac{75}{4.24}$ Thlr. oder $\frac{75}{96}$ Thlr. Oder: $\frac{75}{96}$ Thlr. $= \frac{75.24}{96}$ Gr. $= \frac{75}{4}$ Gr.

13. Bedarf es besonderer Anweisungen, wenn bei der Rechnung mit benannten Zahlen benannte Brüche vorkommen?

Nein, es bedarf keiner besondern Anweisungen, und der Gang der Rechnung mit benannten Zahlen wird dadurch nicht im Geringsten abgeändert, wenn benannte Brüche in denselben vorkommen. Man muß nur zugleich die Regeln, die bei den Rechnungen mit Brüchen gegeben wurden, gehörig beobachten.

Viertes Hauptstück.

Von der Proportionsrechnung.

Vier und zwanzigstes Kapitel.

Vorkenntnisse von Verhältnissen und Proportionen.

1. Was versteht man unter einem Verhältnisse?

Unter einem Verhältnisse versteht man die Vergleichung zweier Zahlen vermittelst der Division.

2. Wie läßt sich dieser Begriff durch ein Beispiel deutlicher machen?

Wenn ich die Zahl 2 mit der Zahl 6 vermittelst der Division vergleiche, d. h. wenn ich untersuche, wie oft 2 in 6 enthalten ist, so entsteht ein Verhältniß. Man sagt dann, die 2 hat zu 6 ein gewisses Verhältniß, nämlich das Verhältniß, daß sie in 6 dividirt 3 zum Quotienten giebt. Das Verhältniß zweier Zahlen wird also durch Division der einen durch die andere bestimmt.

3. Wie bezeichnet man das Verhältniß zweier Zahlen?

Das Verhältniß zweier Zahlen zu einander bezeichnet man eben so, wie man die Division zweier Zahlen bezeichnet; nämlich durch (:). Es wird hier ausgesprochen: „verhält sich zu." Z. B. 2 : 6 heißt 2 verhält sich zu 6, d. h. 2 hat zu 6 ein gewisses Verhältniß.

4. Worin liegt der Grund dieser Bezeichnung?

Der Grund, daß man die Verhältnisse zweier Zahlen eben so bezeichnet, wie die Division zweier Zahlen liegt darin, daß ein Verhältniß, weil es durch die Division einer Zahl in eine andere bestimmt wird, nichts anders ist, als ein Divisionsausdruck, oder als ein Quotient; oder auch, da jeder Bruch als ein Quotient betrachtet werden kann (16, 5), als ein Bruch. Denn 2 : 6 oder das Verhältniß von 2 zu 6 wird bestimmt durch die Division mit 2 in 6, und man könnte daher 2 : 6 auch als einen Divisionsausdruck, oder als einen Bruch, nämlich $\frac{6}{2}$, ansehen.

5. Was versteht man unter dem Verhältnißnamen?

Der Verhältnißname (Name des Verhältnisses) ist der Quotient, den man erhält, wenn man das eine Glied eines Verhältnisses durch das andere, und zwar das zweite durch das erste, dividirt. So ist z. B. bei dem Verhältnisse 2 : 6 der Verhältnißname 3; denn 6 durch 2 dividirt, giebt 3. Eben so ist bei dem Verhältnisse $\frac{1}{2} : \frac{5}{8}$ der Verhältnißname $1\frac{1}{4}$; denn $\frac{5}{8}$ dividirt durch $\frac{1}{2}$ giebt $1\frac{1}{4}$ zum Quotienten.

6. Was sind gleiche Verhältnisse?

Gleiche Verhältnisse sind solche, die einerlei Verhältnißnamen haben. So sind z. B. 2 : 6 und 3 : 9 gleiche Verhältnisse, weil sie beide den Verhältnißnamen 3 haben. Denn 6 dividirt durch 2 giebt 3; und 9 dividirt durch 3 giebt auch 3. Eben so sind $3\frac{1}{4} : 9\frac{3}{4}$ und $2\frac{1}{3} : 7$ gleiche Verhältnisse; denn beide haben den Verhältnißnamen 3.

7. Was ist eine Proportion?

Eine Proportion ist ein Ausdruck, worin zwei Verhältnisse einander gleich gesetzt werden. Eine Proportion wird dadurch bezeichnet, daß man zwischen die beiden gleichen Verhältnisse das Gleichheitszeichen (=) setzt. Z. B. 4 : 8 = 2 : 4 ist eine Proportion, denn es werden hier 2 Verhältnisse einander gleichgesetzt. Das Verhältniß 4 : 8 ist dem Verhältnisse 2 : 4 darum gleich, weil beide den Verhältnißnamen 2 haben. Diese Proportion wird gelesen: 4 verhält sich zu 8 wie 2 zu 4. Eben so ist 12 : 36 = 3 : 9 wegen der Gleichheit

der Verhältniſſe 12 : 36 und 3 : 9 eine Proportion; und aus eben dem Grunde auch $\frac{1}{2} : \frac{2}{11} = \frac{3}{4} : \frac{3}{11}$. Der Verhältnißname dieſer beiden Verhältniſſe iſt $\frac{4}{11}$. Dieſe letzte Proportion wird geleſen: $\frac{1}{2}$ verhält ſich zu $\frac{2}{11}$, wie ſich $\frac{3}{4}$ zu $\frac{3}{11}$ verhält.

8. Wie viel Zahlen ſind zu einer Proportion erforderlich?

Es ſind allemal 4 Zahlen erforderlich, weil eine Proportion aus zwei gleichen Verhältniſſen, jedes Verhältniß aber aus 2 Zahlen beſteht.

9. Was für einen beſondern Namen haben die 4 Zahlen, welche eine Proportion bilden?

Sie heißen Glieder der Proportion, und zwar heißen das erſte und vierte, äußere, das zweite und dritte, mittlere; das erſte und dritte nennt man auch Vorderglieder, weil ſie die erſten Glieder in jedem Verhältniſſe ſind; und das zweite und vierte Hinterglieder. Z. B. in der Proportion:

$$4 : 8 = 6 : 12.$$

heißen die Zahlen 4, 8, 6, 12, welche die Proportion bilden, Glieder der Proportion; und zwar ſind 4 und 12 die äußern, und 8 und 6 die mittlern; 4 und 6 aber ſind die Vorderglieder, und 8 und 12 die Hinterglieder.

10. Wie müſſen benannte Zahlen beſchaffen ſeyn, wenn ſie eine Proportion bilden ſollen?

Wenn die Glieder einer Proportion benannte Zahlen ſind, ſo müſſen nothwendig je zwei, welche ein Verhältniß bilden, von einerlei Art ſeyn, oder einerlei Namen haben.

4 Thlr. : 8 Thlr. = 2 Pfd. : 4 Pfd. iſt da-

her eine richtige Proportion; aber 3 Ctr. : 4 Thlr. = 6 Ellen : 8 Gr. wäre keine richtige Proportion. Der Grund hiervon liegt darin, daß benannte Zahlen nur dann ein Verhältniß zu einander haben, wenn sie von einerlei Benennung sind; da nur benannte Zahlen von einerlei Benennung durch einander dividirt werden können. Z. B. 4 Thlr. : 8 Pfd. kann offenbar kein Verhältniß seyn, da 4 Thlr. und 8 Pfd. gar nicht, also auch nicht vermittelst der Division mit einander verglichen werden können, d. h. da man nicht untersuchen kann, wie viel mal 4 Thlr. in 8 Pfd., oder 8 Pfd. in 4 Thlr. enthalten sind. Wohl aber ist 4 Thlr. : 8 Thlr. oder 4 Pfd. : 8 Pfd. ein Verhältniß.

11. Was ist von dem Producte der äußern Glieder einer Proportion, in Bezug auf das Product der mittlern Glieder dieser Proportion, zu merken?

Es ist zu merken, daß das Product der äußern Glieder einer Proportion dem Producte der mittlern Glieder derselben jedesmal gleich ist. Z. B. in der Proportion

$$3 : 8 = 6 : 16$$

ist das Product der äußern Glieder 3 und 16, dem Producte der mittlern Glieder 8 und 6 gleich, nämlich $3 . 16 = 8 . 6$ d. i. $48 = 48$.

12. Wie läßt sich dies beweisen?

Die Richtigkeit des erwähnten Satzes, daß nämlich das Product der äußern Glieder einer jeden Proportion dem Producte der mittlern Glieder

gleich seyn muß, geht aus Folgendem hervor: Es sey eine beliebige Proportion

$$4 : 8 = 3 : 6;$$

so kann man auch, da ein Verhältniß als ein Quotient oder Bruch angesehen werden kann (vgl. 4), schreiben $\frac{8}{4} = \frac{6}{3}$. Bringt man diese Brüche auf einerlei Benennung; so erhält man $\frac{8.3}{4.3} = \frac{6.4}{3.4}$ d. h. $\frac{8.3}{12} = \frac{6.4}{12}$. Multiplicirt man jeden dieser Brüche mit seinem Nenner, 12, welches nach 22, 2 auch dadurch geschehen kann, daß man den Nenner jedes Bruchs mit 12 dividirt; so erhält man $\frac{8.3}{1} = \frac{6.4}{1}$ d. i. $8 . 3 = 6 . 4$. Das erste Product $8 . 3$ ist aber das Product der äußern Glieder der obigen Proportion, und das zweite $6 . 4$ ist das Product der mittlern Glieder. Folglich ist das Product der äußern Glieder der obigen Proportion dem Producte der mittlern Glieder gleich. Da man aber diesen Beweis bei jeder andern Proportion, als der obigen, anwenden kann, so kann man allgemein behaupten, daß in jeder Proportion das Product der äußern Glieder dem Producte der mittlern Glieder gleich seyn muß.

13. Wozu giebt uns der eben erwiesene Satz ein Mittel an die Hand?

Er giebt uns ein Mittel an die Hand, zu drei bekannten Gliedern einer Proportion das vierte noch unbekannte Glied zu finden. Man braucht nämlich nur das zweite und dritte der bekannten Glieder mit einander zu multipliciren, und dieses Product durch das erste Glied zu dividiren, so ist der Quotient das vierte unbekannte Glied.

14. Wie läßt sich dies durch ein Beispiel deutlich machen?

Wenn z. B. die drei ersten Glieder einer Proportion 3, 15, 8 sind, und man wollte wissen, wie das vierte Glied dieser Proportion hieß, so multiplicirt man das 2te, 15, und das 3te, 8, mit einander, giebt 120, und dividirt dieses Product durch das erste Glied 3, giebt zum Quotienten 40. Dieser Quotient ist das gesuchte vierte Glied, und die Proportion heißt nun:

$$3 : 15 = 8 : 40.$$

15. Wie läßt sich die Richtigkeit dieses Verfahrens darthun?

Wenn man in dem vorigen Beispiele das unbekannte 4te Glied einstweilen mit dem Buchstaben x bezeichnet, so hieße die Proportion

$$3 : 15 = 8 : x.$$

Nach dem in 12 erwiesenen Satze muß aber in jeder Proportion das Product der äußern Glieder dem Producte der mittlern Glieder gleich seyn; also ist $3 . x = 15 . 8$. Dividirt man diese beiden gleichen Producte mit 3, so erhält man: $\frac{3.x}{3} = \frac{15.8}{3}$ d. i. $x = \frac{15.8}{3}$ oder mit Worten ausgesprochen: das unbekannte vierte Glied ist gleich dem Producte des zweiten und dritten Gliedes, dividirt durch das erste Glied.

Anmerkung. Wäre das erste von den 3 bekannten Gliedern einer Proportion 1, so wäre das unbekannte vierte Glied dem Producte des zweiten und dritten Gliedes gleich. Denn wenn die 3 bekannten Glieder einer Propor-

tion 1, 4, 5 sind, und man bezeichnet das unbekannte vierte Glied mit x, so ist $x = \frac{4 \cdot 5}{1}$ d. i. $4 \cdot 5 = 20$. Die Proportion heißt nun $1 : 4 = 5 : 20$. Daß diese Proportion richtig ist, gehet daraus hervor, daß die beiden Verhältnisse einerlei Verhältnißnamen haben, also einander gleich sind. Denn $\frac{4}{1} = 4$ und $\frac{20}{5} = 4$.

16. Ist es durchaus nöthig, daß die 4 Glieder einer Proportion immer in ein und derselben Ordnung unverändert stehen bleiben müssen, wenn die Proportion nicht zerstört werden soll?

Nein, dies ist nicht nothwendig. Man kann mit den Gliedern einer Proportion verschiedene Veränderungen vornehmen, ohne daß die Proportion zerstört wird.

17. Welches ist die erste Veränderung, die man mit den Gliedern einer Proportion vornehmen kann, ohne daß die Proportion zerstört wird?

I. Man kann die mitlern Glieder einer Proportion mit einander verwechseln, d. h. das dritte in die Stelle des 2ten, und das 2te in die Stelle des 3ten setzen, ohne daß die Proportion geändert wird; z. B. in der Proportion

$$2 : 4 = 3 : 6$$

kann man das 3te Glied 3 an die Stelle des 2ten Gliedes 4, und dieses an die Stelle jenes setzen, ohne daß die Proportion zerstört wird. Nämlich:

$$2 : 3 = 4 : 6$$

18. Welches ist die zweite Veränderung?

II. Man kann die Glieder jedes Verhältnisses mit einander verwechseln, d. h. die Hinterglieder zu Vordergliedern, und die Vorderglieder zu Hintergliedern machen. Z. B. in der Proportion

$$\frac{1}{2} : \frac{3}{5} = \frac{4}{7} : \frac{24}{35}$$

kann man die Hinterglieder $\frac{3}{5}$ und $\frac{24}{35}$ zu Vordergliedern, und die Vorderglieder $\frac{1}{2}$ und $\frac{4}{7}$ zu Hintergliedern machen, ohne daß die Proportion im geringsten gestört wird; nämlich:

$$\frac{3}{5} : \frac{1}{2} = \frac{24}{35} : \frac{4}{7}$$

19. Woraus gehet die Zulässigkeit dieser beiden Veränderungen hervor?

Sie gehet daraus hervor, daß in den durch diese Veränderungen umgeänderten Proportionen immer das erste Verhältniß dem zweiten gleich ist, da beide Verhältnisse immer denselben Verhältnißnamen behalten.

20. Wozu können diese beiden Veränderungen nützen?

Sie können dazu nützen, jedes Glied einer Proportion an jede beliebige Stelle zu bringen. Z. B. wenn man in der Proportion

$$2 : 3 = 4 : 6$$

das letzte Glied 6 an die erste Stelle bringen wollte, so ist:

$3 : 2 = 6 : 4$ durch Verwechselung der Glieder jedes Verhältnisses nach II.

$3 : 6 = 2 : 4$ durch Verwechselung der mittlern Glieder nach I.

$6 : 3 = 4 : 2$ wieder nach II.

Die Zahl 6, die in der ursprünglichen Pro-

portion das vierte Glied bildete, ist nun in der letzten das erste Glied, ohne daß die Proportion zerstört wurde. Denn daß diese letzte Proportion

$$6 : 3 = 4 : 2$$

richtig ist, gehet daraus hervor, daß die beiden Verhältnisse einerlei Verhältnißnamen haben, also einander gleich sind. Denn

$$\frac{3}{6} \text{ oder } \frac{1}{2} = \frac{2}{4} \text{ oder } \frac{1}{2}.$$

Wäre in einer Proportion ein Glied außer dem vierten bekannt, so könnte man es vermöge dieser Veränderungen in die Stelle des 4ten Gliedes bringen, und nach 13 finden. Nämlich wenn in der Proportion

$$2 : x = 4 : 7$$

das 2te Glied unbekannt ist, so verändere man diese Proportion so, daß das unbekannte 2te Glied in die Stelle des vierten Gliedes kommt; nämlich:

$$2 : 4 = x : 7 \text{ vermöge I.}$$
$$4 : 2 = 7 : x \text{ vermöge II.}$$

Das unbekannte Glied ist nun $= \frac{2 \cdot 7}{4} = \frac{14}{4}$ d. i. $3\frac{1}{2}$, und die erste Proportion heißt nun

$$2 : 3\frac{1}{2} = 4 : 7.$$

21. Lassen sich außer den bereits aufgeführten 2 Veränderungen nicht noch andere Verwandlungen mit den Gliedern einer Proportion vornehmen?

Allerdings lassen sich auch noch andere Verwandlungen mit den Gliedern einer Proportion vornehmen, ohne daß die Proportion zerstört wird.

22. Welches ist die erste dieser Verwandlungen?

I. Man kann in beiden Verhältnissen einer Proportion eine gleichförmige Addition der Glieder vornehmen. Z. B. wenn

$$2 : 3 = 4 : 6,$$ so ist auch

$$2+3 : 3 = 4+6 : 6$$

d. i.

$$5 : 3 = 10 : 6$$

d. h. wenn man in einer Proportion das erste und zweite Glied addirt, so verhält sich diese Summe zu dem zweiten Gliede, wie die Summe des dritten und vierten Gliedes zum vierten Gliede.

Oder auch

$$2 : 3+2 = 4 : 6+4$$

d. i.

$$2 : 5 = 4 : 10$$

d. h. das erste Glied einer Proportion verhält sich zur Summe des zweiten und ersten, wie sich das dritte Glied zur Summe des vierten und dritten verhält.

23. Welches ist die zweite Verwandlung?

II. Man kann in beiden Verhältnissen einer Proportion eine gleichförmige Subtraction der Glieder vornehmen, z. B. wenn

$$2 : 3 = 4 : 6$$; so ist auch

$$2:3-2=4:6-4$$

d. i.

$$2 : 1 = 4 : 2$$

d. h. das erste Glied einer Proportion verhält sich zu dem Unterschiede des ersten Gliedes vom

zweiten, wie sich verhält das dritte Glied zu dem Unterschiede des dritten vom vierten.

Eben so wenn:

$$4 : 2 = 6 : 3 ;$$ so ist auch

$$4-2 : 2 = 6-3 : 3$$

d. i.

$$2 : 2 = 3 : 3$$

d. h. der Unterschied des zweiten Gliedes vom ersten verhält sich zum zweiten Gliede, wie sich verhält der Unterschied des vierten Gliedes vom dritten, zum vierten Gliede.

24. Welches ist die dritte Verwandlung?

III. Man kann die Glieder jedes Verhältnisses einer Proportion, oder auch die Vorderglieder und die Hinterglieder mit einerlei Zahl multipliciren oder durch einerlei Zahl dividiren. Z. B. wenn

$$2 : 4 = 3 : 6 ;$$ so ist auch

$$2.3 : 4.3 = 3 : 6$$

d. i.

$$6 : 12 = 3 : 6 ;$$ ferner

$$2 : 4 = 3.4 : 6.4$$

d. i.

$$2 : 4 = 12 : 24$$

oder auch

$$2.6 : 4 = 3.6 : 6$$

d. i.

$$12 : 4 = 18 : 6 ;$$ oder

$$2 : 4.7 = 3 : 6.7$$

d. i.

$$2 : 28 = 3 : 42$$

Eben so, wenn:

$12 : 24 = 16 : 32$; so ist auch

$\frac{12}{4} : \frac{24}{4} = 16 : 32$

d. i.

$3 : 6 = 16 : 32$ ferner

$12 : 24 = \frac{16}{8} : \frac{32}{8}$

d. i.

$12 : 24 = 2 : 4.$; oder endlich

$\frac{12}{4} : 24 = \frac{16}{4} : 32$

d. i.

$3 : 24 = 4 : 32$; und

$3 : \frac{24}{4} = 4 : \frac{32}{4}$

d. i.

$3 : 6 = 4 : 8.$

25. Woraus gehet die Zulässigkeit aller dieser Verwandlungen hervor?

Daß alle diese Verwandlungen mit den Gliedern einer Proportion vorgenommen werden können, ohne daß die Proportion zerstört wird, gehet daraus hervor, daß in jeder neuen, durch diese Verwandlungen entstandenen Proportion die Verhältnisse gleich sind.

26. Wozu kann die letztangeführte Verwandlung dienen?

Sie kann

1) dazu dienen, Brüche in einer Proportion wegzuschaffen; z. B. wenn man in der Proportion

$\frac{3}{4} : \frac{5}{8} = 16 : 13\frac{1}{3}$

die Glieder des ersten Verhältnisses mit 8 multiplicirt, so erhält man:

$\frac{24}{4} : \frac{40}{8} = 16 : 13\frac{1}{3}$

d. i.

$6 : 5 = 16 : 13\frac{1}{3}$

Eben so, wenn:

$\frac{1}{2} : 3 = \frac{3}{4} : 4\frac{1}{2}$

so kann man die Brüche im ersten und 3ten Gliede wegschaffen, wenn man diese Glieder mi 4 multiplicirt; man erhält dann:

$\frac{4}{2} : 3 = \frac{12}{4} : 4\frac{1}{2}$

d. i.

$2 : 3 = 3 : 4\frac{1}{2}$.

2) Kann die letztangeführte Verwandlung dazu dienen, die Glieder einer Proportion, welche aus großen Zahlen bestehen, in kleinern Zahlen darzustellen, und die Rechnung auf diese Art zu vereinfachen. Z. B. wenn

$12 : 48 = 9 : 36$

so kann man die beiden Glieder des ersten Verhältnisses mit 12 dividiren, und man erhält

$1 : 4 = 9 : 36$;

oder die beiden Glieder des zweiten Verhältnisses mit 9, giebt

$12 : 48 = 1 : 4$

Ferner kann man auch die Vorderglieder und auch die Hinterglieder mit einerlei Zahl dividiren; nämlich:

$\frac{12}{3} : 48 = \frac{9}{3} : 36$

d. i.

$4 : 48 = 3 : 36$; oder auch

$4 : \frac{48}{6} = 3 : \frac{36}{6}$

d. i.

$4 : 8 = 3 : 6$.

Man wird in der Folge sehen, daß ein solches Verkleinern der Glieder einer Proportion oft großen Vortheil gewährt.

27. Was ist von der Summe der Glieder mehrerer gleicher Verhältnisse zu merken?

Wenn 3 oder mehrere Verhältnisse einander gleich sind; so verhält sich die Summe aller Vorderglieder zu der Summe aller Hinterglieder, wie ein Vorderglied zu seinem Hintergliede.

28. Wie läßt sich dies durch ein Beispiel deutlich machen?

Wenn man 3 gleiche Verhältnisse hat, z. B.

$3 : 6 = 4 : 8 = 7 : 14$; so ist:

$3 + 4 + 7 : 6 + 8 + 14 = 3 : 6$; oder

$= 4 : 8$; oder

$= 7 : 14$.

29. Was ist von den Producten zu merken, welche entstehen, wenn die Glieder zweier oder mehrerer Proportionen nach der Ordnung mit einander multiplicirt werden?

Es ist zu merken, daß diese Producte in eben der Ordnung proportionirt sind, d. h. eine Proportion bilden.

30. Wie läßt sich dies durch ein Beispiel erläutern?

Wenn folgende 3 Proportionen gegeben sind: $3 : 5 = 12 : 20$; $4 : 8 = 2 : 4$; und $6 : 2 = 21 : 7$; so sind die Producte, welche entstehen, wenn man die Glieder dieser Proportionen nach der Ordnung mit einander multiplicirt, d. h. die ersten Glieder mit einander, dann

die zweiten u. s. f., wiederum in derselben Ordnung proportionirt; nämlich:

3 : 5 = 12 : 20
4 : 8 = 2 : 4
6 : 2 = 21 : 7

3.4.6 : 5.8.2 = 12.2.21 : 20.4.7

d. i.

72 : 80 = 504 : 560.

Daß diese Producte wirklich wieder eine richtige Proportion bilden, geht daraus hervor, daß die Verhältnißnamen der beiden Verhältnisse dieselben, also die Verhältnisse einander gleich sind. Denn:

$\frac{80}{72}$ d. i. $1\frac{1}{9} = \frac{560}{504}$ d. i. $1\frac{1}{9}$.

Anmerkung. Wenn die Proportionen von der Art sind, daß das Hinterglied des einen Verhältnisses immer dem Vorderglied des nachfolgenden gleich ist; so kann man diese Glieder bei der Multiplication ganz übergehen; weil sie sonst noch durch Division gegen einander aufgehoben werden könnten. Z. B.

2 : 4 = 3 : 6
4 : 12 = 5 : 15

2 : 12 = 3.5 : 6.15.

d. i.

2 : 12 = 15 : 90.

Eben so:

$$2 : A = 3 : B$$
$$A : 12 = B : 18$$
$$12 : 2A = 18 : 3B$$
$$2A : 36 = 3B : 54$$

$$2 : 36 = 3 : 54.$$

Fünf und zwanzigstes Kapitel.

Von der Proportionsrechnung im Allgemeinen.

1. Was sind proportionale Größen?

Größen sind einander proportional, oder in geradem Verhältniß zu einander, wenn aus einer Vermehrung der einen nothwendig eine Vermehrung der andern in demselben Verhältnisse folgt.

2. Was sind umgekehrt proportionale Größen?

Größen sind einander umgekehrt proportional, oder stehen in umgekehrtem Verhältnisse zu einander, wenn aus einer Vermehrung der einen nothwendig eine Verminderung der andern in demselben Verhältnisse folgt.

3. Wie lassen sich diese Begriffe durch Beispiele deutlich machen?

Wenn z. B. 4 Pfund einer Waare 3 Thlr. kosten; so sind diese beiden Größen einander proportional, oder sie stehen in geradem Verhältniß zu einander; denn wenn ich die eine vermehre, so muß nothwendig auch die andere in demselben

Verhältniſſe vermehrt werden. Wenn ich noch einmal ſo viel Pfund von dieſer Waare kaufe, nämlich 8 Pfund; ſo muß ich auch dafür noch einmal ſo viel Thaler bezahlen, als für 4 Pfund, alſo 6 Thlr. Kaufe ich 6mal ſo viel Pfunde, alſo 24 Pfd.; ſo muß ich auch 6mal ſo viel Thaler, nämlich 18 Thlr. dafür bezahlen.

Wenn man aber hat: 8 Arbeiter verrichten eine Arbeit in 18 Tagen: ſo ſind dieſe Größen, 8 Arbeiter und 18 Tage, einander umgekehrt proportional, oder ſie ſtehen in umgekehrtem Verhältniſſe zu einander. Denn wenn ich die erſte vermehre, ſo muß die zweite in demſelben Verhältniſſe vermindert werden. Denn werden zu dieſer Arbeit noch einmal ſo viel, alſo 16 Arbeiter, genommen, ſo brauchen ſie offenbar nur halb ſo viel Zeit, nämlich nur 9 Tage, um die Arbeit zu Stande zu bringen. Werden 3mal ſo viel Arbeiter, nämlich 24, genommen, ſo brauchen ſie zur Arbeit auch nur 3mal weniger Zeit, nämlich nur 6 Tage.

Allgemein kann man alſo ſagen: die Menge der eingekauften Waare iſt der Menge des Geldes, das ich dafür bezahlen muß, proportional; allein die Anzahl der Arbeiter ſteht bei einerlei Arbeit mit der Zeit, welche zu der Arbeit nöthig iſt, in umgekehrtem Verhältniſſe.

4. Woher kann man wiſſen, ob Größen in geradem oder in umgekehrtem Verhältniſſe zu einander ſtehen?

Dies kann man nur aus der Beſchaffenheit

der Größen kennen lernen, und läßt sich also nur entscheiden, wenn man dieselben nur aus dem gemeinen Leben, oder aus Büchern kennt. Doch kann man Folgendes merken:

I. In geradem Verhältniß zu einander stehen:

1) Die Menge der eingekauften Waare und die Größe des Preißes. Denn je mehr ich von einer Waare einkaufe, desto mehr muß ich auch dafür bezahlen.

2) Die Größen des Kapitals bei einerlei Zinsfuß und die Größe der Zinsen. Denn je größer das Kapital ist, desto mehr Zinsen trägt es auch, wenn der Zinsfuß einerlei bleibt.

3) Die Menge der nöthigen Lebensmittel bei einerlei Zeitdauer und die Anzahl der zu erhaltenden Menschen. Denn je mehr Lebensmittel da sind, desto mehr Menschen können auch bei einerlei Zeitdauer davon erhalten werden.

4) Die Geschwindigkeit zweier Boten und die Wege, welche sie in einerlei Zeit zurücklegen. Denn je schneller ein Bote geht, einen desto längern Weg wird er bei einerlei Zeit zurücklegen.

5) Die Größe der Arbeit und die Zeit, welche nöthig ist, um dieselbe zu Stande zu bringen, wenn nämlich die Zahl der Arbeiter dieselbe ist. Denn je größer die Arbeit ist, die eine gewisse Anzahl von Arbeitern verrichten soll, desto längere Zeit brauchen sie dazu.

6) Die Größe der Arbeit und die Anzahl der Arbeiter, wenn nämlich die Zeit, in welcher

die Arbeit zu Stande gebracht werden soll, dieselbe ist. Denn je grösser die Arbeit ist, die in einer bestimmten Zeit verrichtet werden soll, desto mehr Arbeiter müssen daran arbeiten.

7) Die Größe der Arbeit und der Lohn, der dafür bezahlt wird; denn je mehr Arbeit verrichtet worden ist, desto mehr Lohn muß auch dafür bezahlt werden.

II. In umgekehrtem Verhältniß zu einander stehen:

1) Die zu einer Kleidung nöthige Anzahl Ellen eines Zeuchs und die Breite desselben. Denn je breiter das Zeuch ist, desto weniger Ellen braucht man zu der Kleidung.

2) Die Größe des Kapitals und der Zinsfuß, wenn die Zinsen einerlei sind. Denn je größer das Kapital ist, desto weniger Procente werden vom Hundert gegeben, wenn man nämlich immer gleich viel Zinsen erhält.

3) Die Anzahl der Menschen, die von einer bestimmten Menge Lebensmittel erhalten werden sollen, und die Zeit, in welcher sie davon erhalten werden sollen. Denn je mehr Menschen von einer gewissen Menge Lebensmittel erhalten werden sollen, desto kürzere Zeit werden die Lebensmittel reichen.

4) Die Geschwindigkeit zweier Boten und die Zeiten, die sie zu einerlei Weg gebrauchen. Denn je geschwinder ein Bote ist, desto weniger Zeit braucht er, um einen gewissen Weg zurückzulegen.

5) Die Zeit, in welcher eine Arbeit verrichtet werden soll, und die Anzahl der Arbeiter. Denn je mehr Zeit dazu gebraucht werden soll, um eine Arbeit zu Stande zu bringen, desto weniger Arbeiter braucht man dazu. Oder: je mehr Arbeiter man zu einer bestimmten Arbeit nimmt, desto weniger Zeit gebrauchen sie zu dieser Arbeit.

III. Die Anzahl der vorgespannten Pferde und die Anzahl Meilen, die man zurücklegt, stehen mit einander weder in geradem noch in umgekehrtem Verhältnisse. Z. B. Wenn man 2 Pferde braucht, um eine gewisse Last in 4 Stunden an einen Ort zu ziehen, so kann man daraus nicht schließen, daß man dieselbe Last mit 4 Pferden in zwei Stunden dahin bringen könnte. Und wäre dies auch mit größter Anstrengung möglich, so könnte man doch nunmehr nicht weiter schließen; denn sonst würde folgen, daß man mit 8 Pferden in 1 Stunde, mit 16 Pferden in $\frac{1}{2}$ Stunde; mit 32 Pferden in $\frac{1}{4}$ Stunde, und mit 64 Pferden in $7\frac{1}{2}$ Minute diese Strecke zurücklegen könnte; welches offenbar ungereimt geschlossen wäre.

5. Was versteht man unter der Proportionsrechnung?

Unter der Proportionsrechnung versteht man allgemein die Vorschrift, zu einer gegebenen Größe eine andere vermittelst gegebener Verhältnisse finden.

6. Was für verschiedene Rechnungen begreift die Proportionsrechnung unter sich?

Man kann folgende unter der Proportionsrechnung begriffene Rechnungen unterscheiden:

1) Die einfache Regel Detri;
2) Die zusammengesetzte Regel Detri;
3) Die Reductionsrechnung;
4) Die Kettenregel;
5) die Gesellschaftsrechnung;
6) Die Vermischungs- und Alligationsrechnung; und
7) die Zinsrechnung.

Sechs und zwanzigstes Kapitel.

Von der einfachen Regel Detri.

1. Was bedeutet der Name Regel Detri?

Er bedeutet eigentlich: die Regel von drei, nämlich Sätzen oder Gliedern.

2. Was versteht man unter Regel Detri?

Man versteht darunter die Lehre, aus 3 gegebenen Gliedern einer Proportion das vierte noch unbekannte zu finden.

3. Wie läßt sich dies durch ein Beispiel deutlich machen?

Wenn z. B. gefragt wird: was kosten 8 Pfd. von einer Waare, wenn 4 Pfd. 3 Thlr. kosten: so kann man diese 3 Zahlen als Glieder einer Proportion betrachten, in welcher das vierte Glied noch unbekannt ist; 4 Pfd. ist das erste Glied, 8 Pfd. das zweite, und 3 Thlr. das dritte. Denn wenn 4 Pfd. 3 Thlr. kosten, so müssen 8 Pfd.

so viele Thaler kosten, so vielmal 4 Pfd. in 8 Pfd. enthalten sind, d. h. 4 Pfd. muß sich zu 8 Pfd. eben so verhalten, wie 3 Thlr. zu der noch unbekannten Anzahl von Thalern. Nennt man diese unbekannte Anzahl von Thalern x, so erhält man folgende Proportion:

4 Pfd. : 8 Pfd. = 3 Thlr. : x Thlr.

Es käme also hier darauf an, das vierte Glied x dieser Proportion aus den 3 ersten Gliedern zu bestimmen. Hat man es gethan, so weiß man dann auch, wie viel Thaler 8 Pfd. kosten. Dieses 4te Glied in allen Fällen richtig zu finden, lehrt nun eben die Regeldetri.

4. Wie viel Zahlen sind in einer Regeldetri-Aufgabe jedesmal gegeben?

Es sind allemal 3 Größen oder Zahlen gegeben, und eine vierte wird gesucht. Z. B. in der vorigen Aufgabe sind 3 Zahlen, nämlich 4 Pfd., 8 Pfd., 3 Thlr., gegeben, und eine vierte, nämlich die Anzahl der Thaler, die 8 Pfd. kosten, wird gesucht.

5. Giebt es gewisse Regeln, nach denen man verfahren muß, um dergleichen Aufgaben richtig aufzulösen?

Allerdings giebt es dergleichen Regeln, die man wohl merken und beobachten muß, wenn man die bei der Regeldetri vorkommenden Aufgaben jederzeit richtig auflösen will.

6. Wie heißt die erste Regel?

Erste Regel. Zuerst muß man die Aufgabe, welche aufgelößt werden soll, aufmerksam durch-

lesen, damit man sieht, ob die Aufgabe richtig gestellt ist, und aufgelößt werden kann.

Wenn z. B. die Aufgabe gegeben wäre: Im Jahr 1816 ärndete Jemand von einem Weitzenfelde 9 Schock, von einem benachbarten Haferfelde aber 12 Schock. Im Jahr 1817 wurden von dem erstern 11 Schock geerndet: wie viel wurde also von dem Haferfelde eingeerndet? — so kann man hier nicht annehmen, daß der Ertrag des Weitzenfeldes mit dem Ertrage des Haferfeldes im Verhältniß steht; weil es ganz vom Zufalle abhängt, ob, wenn das Weitzenfeld eine reichlichere Ernde giebt, auch das Haferfeld in demselben Maaße eine reichlichere Ernde giebt. Man kann also 9 Schock, 11 Schock und 12 Schock nicht als Glieder einer Proportion betrachten, und jene Aufgabe ist, so wie sie hier steht, gar keine Aufgabe, die aufgelößt werden kann. Dasselbe gilt von folgender Aufgabe: 4 Pferde legen einen gewissen Weg in 12 Stunden zurück: wie viel Zeit brauchen 8 Pferde zu eben diesem Wege? denn nach 25, 4. III. kann zwischen der Anzahl Pferde und der Zeit, in welcher sie einen und denselben Weg zurücklegen, gar kein Verhältniß, weder ein gerades, noch ein umgekehrtes, Statt finden.

Betrachtet man hingegen folgende Aufgabe: wenn 4 Ellen 3 Gr. kosten, was kosten 15 Ellen? — so sieht man, daß sie allerdings aufgelößt werden kann. Denn da sich die Menge der gekauften Waare eben so verhält, als die

Größe des Preißes; so müssen sich 4 Ellen zu 15 Ellen eben so verhalten, wie 3 Gr. zu der gesuchten Anzahl von Groschen; und die in der Aufgabe gegebenen Größen 4 Ellen, 15 Ellen 3 Gr. können also als Glieder einer Proportion betrachtet werden, in welcher das vierte Glied noch unbekannt ist, und erst gefunden werden soll. Nennte man die gesuchte Anzahl von Groschen x, so würde man folgende Proportion erhalten:

4 Ellen : 15 Ellen = 3 Gr. : x Gr.

7. Welches ist die zweite Regel, die man zu beobachten hat?

Zweite Regel. Man unterscheide die Angabe, welche 2 gegebene Dinge von verschiedener Art enthält; und die Frage, welche eben dieselben Dinge, darunter das unbekannte begriffen ist, enthalten muß.

Z. B. in der Aufgabe: 4 Pfd. kosten 7 Thlr., was kosten 8 Pfd.? ist

4 Pfd. kosten 7 Thlr. die Angabe, und
8 Pfd. kosten wie viel Thaler? die Frage.

Eben so ist in der Aufgabe: 10 Arbeiter brauchen zu einer Arbeit 4 Tage: wie viel Tage brauchen 5 Arbeiter zu dieser Arbeit?

10 Arb. brauchen 4 Tage die Angabe
5 Arb. brauchen wie viel Tage? die Frage.

8. Welches ist die dritte Regel?

Dritte Regel. Man untersuche genau, ob die in der Aufgabe vorkommenden Sachen in gera-

dem, oder in umgekehrtem Verhältniß mit einander stehen (nach 25, 4).

In dem ersten der vorigen Exempel sind die Pfunde mit den Thalern in geradem Verhältnisse; denn je mehr Pfund, je mehr Thaler. Im zweiten Exempel aber sind die Tage in umgekehrtem Verhältniß mit den Arbeitern; denn je mehr Arbeiter an einer Arbeit arbeiten, desto weniger Tage brauchen sie zu dieser Arbeit.

9. Welches ist die vierte Regel?

Vierte Regel. Sind die in der Aufgabe vorkommenden Sachen in geradem Verhältniß zu einander, so setze man die Zahl, welche zur Frage gehört (Fragzahl), an die Stelle des zweiten Glieds der Proportion, und die Zahl, die mit ihr von einerlei Art ist, in die Stelle des ersten Gliedes. In dem ersten Exempel ist die Zahl, welche zur Frage gehört, oder die Fragzahl, 8 Pfd.; die Zahl aber, die mit ihr von einerlei Art ist, 4 Pfd., deshalb kommt 8 Pfd. in die Stelle des zweiten Glieds der Proportion; 4 Pfd. aber in die Stelle des ersten Glieds; nämlich:

4 Pfd. : 8 Pfd.

Stehen aber die in der Aufgabe vorkommenden Sachen in umgekehrtem Verhältniß zu einander, so setze man die zur Frage gehörige Zahl in die Stelle des ersten Gliedes der Proportion; die Zahl aber, die mit ihr von einerlei Art ist, in die Stelle des zweiten Gliedes. In dem zweiten Exempel ist die zur Frage gehörige Zahl 5 Arbeiter; die Zahl aber, die mit ihr von einerlei

Art ist, 10 Arbeiter. Da nun die Arbeiter mit den Tagen in umgekehrtem Verhältnisse stehen; so muß 5 Arbeiter an die Stelle des ersten Gliedes der Proportion kommen; 10 Arbeiter aber an die Stelle des zweiten Gliedes; nämlich:

5 Arbeiter : 10 Arbeiter.

10. Welches ist die fünfte Regel?

Fünfte Regel. Man setze nun ferner die außer den 2 vorigen Zahlen gegebene dritte Zahl an die Stelle des dritten Gliedes der Proportion; die zu suchende Zahl aber, die man mit x benennt, in die Stelle des vierten Gliedes. In dem ersten Beispiele ist die noch übrige Zahl 7 Thlr. Diese kommt also an die dritte Stelle der Proportion, und x, oder die unbekannte Zahl an die vierte Stelle; nämlich:

4 Pfd. : 8 Pfd. = 7 Thlr. : x Thlr.

Im zweiten Exempel ist die dritte noch gegebene Zahl 4 Tage. Diese kommt daher in das dritte Glied, x aber in die vierte; nämlich:

5 Arb. : 10 Arb. = 4 Tage : x Tagen.

11. Wie heißt die sechste Regel?

Sechste Regel. Wenn die Glieder in den angesetzten Verhältnissen nicht von gleicher Benennung sind, so bringe man sie unter einerlei Benennung. Wenn z. B. das Exempel gegeben wäre: 6 Ctr. kosten 10 Thlr., was kosten 4 Pfd.? — so würde man nach den vorhergehenden Regeln so ansetzen müssen:

6 Ctr. : 4 Pfd. = 10 Thlr. : x Thlr.

Die Glieder des ersten Verhältnisses sind hier

nicht von einerlei Benennung. Ehe man mit der Berechnung weiter fortschreitet, müssen sie unter einerlei Benennung gebracht werden. Dies kann auf zweierlei Art geschehen. Entweder macht man die Ctr. zu Pfunden (nach 12, 6); oder man verwandelt die 4 Pfd. in einen Bruch vom Ctr. (nach 23, 6). Im ersten Falle erhält man:

660 Pfd. : 4 Pfd. = 10 Thlr. : x Thlr.

Im zweiten aber:

6 Ctr. : $\frac{2}{5}$ Ctr. = 10 Thlr. : x Thlr.

Welche von beiden Arten man in einem Exempel anzuwenden hat, hängt davon ab, welche von beiden die bequemste ist.

12. Wie heißt die siebente Regel?

Siebente Regel. Wenn in den Gliedern der angesetzten Verhältnisse ungleichbenannte Zahlen vorkommen, so bringe man sie nach 12, 11. 2 auf einerlei Benennung.

Z. B. die Aufgabe: 19 Ellen kosten 4 Thlr. 12 Gr. 3 Pf., was kosten 7 Ellen? — müßte nach den vorigen Regeln so angesetzt werden:

19 Ellen : 7 Ellen = 4 Thlr. 12 Gr. 3 Pf. : x Thlr.

Das dritte Glied dieser Proportion besteht aus einer ungleichbenannten Zahl. Diese muß man auf gleiche Benennung bringen. Dieses kann nun auf zweierlei Weise geschehen:

1) man verwandelt sie in Pfennige; oder

2) man verwandelt sie in einen Afterbruch vom Thaler nach 23, 10. Im ersten Falle erhielt man:

19 Ellen : 7 Ellen = 1200 Pf. : x.

Im zweiten Falle erhielt man:

19 Ellen : 7 Ellen = $\frac{433}{96}$ Thlr. : x.

Eben so bei folgendem Exempel: 100 Thaler Kapital geben 4 Thaler Zinsen, wie viel Thaler Zinsen geben 3423 Thlr. 16 Gr. 4 Pf.? Hier ist, wenn man die Proportion ansetzt:

100 Thlr. : 3423 Thlr. 16 Gr. 4 Pf. = 4 Thlr. : x Thlr.

Das zweite Glied eine ungleichbenannte Zahl, die man auf einerlei Benennung zu bringen hat. verfährt man nach der ersten Art, so erhält man:

100 Thlr. : 985920 Pf. = 4 Thlr. : x Thlr.

Da aber hier die beiden Glieder des ersten Verhältnisses von ungleicher Benennung sind, so müßte man sie erst, nach der vorhergehenden Regel auf einerlei Benennung bringen, indem man etwa die 100 Thlr. im ersten Gliede ebenfalls in Pfennige verwandelt. Man erhielt dann:

28800 Pf. : 985920 Pf. = 4 Thlr. : x Thlr.

Wenn man aber nach der zweiten Art verfährt, so erhält man:

100 Thlr. : 3423 $\frac{42}{72}$ Thlr. = 4 Thlr. : x Thlr.

Man sieht hier, daß die zweite Art vor der ersten bedeutende Vorzüge hat, weil man im zweiten Gliede keine so große Zahl erhält, und weil man die beiden Glieder des ersten Verhältnisses nicht erst auf einerlei Benennung zu bringen brauchte. Man kann daher allgemein sagen: wenn ein Glied des ersten Verhältnisses eine ungleichbenannte Zahl ist, so bringe sie auf einerlei Benennung, und zwar auf diejenige, welche das andere Glied hat. Jedoch können einzelne

Fälle vorkommen, wo es dennoch besser ist, nach der ersten Art die Verwandlung vorzunehmen.

13. Wie heißt die achte Regel?

Achte Regel. Kommen in den Gliedern der angesetzten Proportion Brüche vor, so schaffe man sie, nach 24, 26. 1., hinweg.

Z. B. die Aufgabe: $\frac{2}{3}$ Pfd. kosten 3 Gr. was kosten $\frac{5}{6}$ Pfd.? — würde nach den vorigen Regeln so stehen:

$\frac{2}{3}$ Pfd. : $\frac{5}{6}$ Pfd. = 3 Gr. : x Gr.

Die Brüche in den Gliedern des ersten Verhältnisses werden weggeschafft, und man erhält dann:

4 Pf. : 5 Pfd. = 3 Gr. : x Gr.

Die Aufgabe: $\frac{8}{11}$ Ellen kosten $\frac{3}{4}$ Gr., was kosten $\frac{7}{22}$ Ellen? — würde so stehen:

$\frac{8}{11}$ Ellen : $\frac{21}{22}$ Ellen = $\frac{3}{4}$ Gr. : x.

Zuerst schafft man die Brüche in den Gliedern des ersten Verhältnisses weg; man erhält:

16 Ellen : 21 Ellen = $\frac{3}{4}$ Gr. : x.

Den Bruch im dritten Gliede schafft man nun ebenfalls hinweg, und man erhält dann die ganze Proportion in ganzen Zahlen ausgedrückt; nämlich:

72 Ellen : 21 Ellen = 3 Gr. : x Gr.

14. Welches ist die neunte Regel?

Neunte Regel. Wenn in den Gliedern der angesetzten Proportion gemischte Zahlen vorkommen, so verwandle man sie in Afterbrüche, und verfahre hierauf nach der achten Regel.

Z. B. die Aufgabe: $3\frac{1}{2}$ Pfd. kosten $7\frac{3}{4}$ Gr.;

was kosten $7\frac{7}{9}$ Pfd.? — würde so angesetzt werden:

$3\frac{1}{2}$ Pfd. : $7\frac{7}{9}$ Pfd. = $7\frac{3}{4}$ Gr. : x.

Verwandelt man die gemischten Zahlen in Afterbrüche, so erhält man:

$\frac{7}{2}$ Pfd. : $\frac{70}{9}$ Pfd. = $\frac{31}{4}$ Gr. : x.

Schafft man nun die Brüche, wie gezeigt worden, hinweg; so erhält man endlich:

126 Pf. : 70 Pfd. = 31 Gr. : x Gr.

15. Welches ist die zehnte Regel?

Zehnte Regel. Wenn sich die Glieder des ersten Verhältnisses der angesetzten Proportion; oder auch das erste und dritte Glied, durch einerlei Zahlen dividiren lassen, so dividire man sie damit, um sie auf die kleinsten Zahlen zu bringen (vgl. 24, 26. 2).

Z. B. die Aufgabe: 21 Ellen kosten 15 Gr., was kosten 56 Ellen? — wird so angesetzt:

21 Ellen : 56 Ellen = 15 Gr. : x.

Hier lassen sich die Glieder des ersten Verhältnisses durch 7 dividiren; man erhält dann:

3 Ellen : 8 Ellen = 15 Gr. : x.

Hier lassen sich wieder das erste und dritte Glied mit 3 dividiren; und man erhält dann die Proportion in den kleinsten Zahlen ausgedrückt; nämlich:

1 Elle : 8 Ellen = 5 Gr. : x.

Daß dieses Zurückführen der Glieder einer Proportion auf die kleinsten Zahlen ungemein vortheilhaft ist, und die Rechnung sehr erleichtert, erhellet auf den ersten Blick.

16. Welches ist die elfte Regel?

Elfte Regel. Ist die Proportion nach den bisher gegebenen Regeln gehörig vorbereitet; so multiplicirt man das zweite und dritte Glied der Proportion, dividire dieses Product durch das erste Glied, und gebe dem Quotienten dieselbe Benennung, die das dritte Glied hat: so ist dieser Quotient das gesuchte vierte Glied der Proportion.

Z. B. in dem letzten Exempel ist das gesuchte 4te Glied oder

$$x = \frac{8 \cdot 5}{1}\ \text{Gr.} = 40\ \text{Gr.}$$

17. Wie lassen sich die gegebenen Regeln an Beispielen deutlich machen?

Erstes Beispiel.

$\frac{2}{3}$ Pf. kosten 2 Thlr. 12 Gr. 4 Pf. : was kosten $7\frac{5}{6}$ Pfd.?

$\frac{2}{3}$ Pfd. : $7\frac{5}{6}$ Pfd. = 2 Thlr. 12 Gr. 4 Pf. : x nach Regel 4 und 5.

$\frac{2}{3}$ Pfd. : $\frac{47}{6}$ Pfd. = 2 Thlr. 12 Gr. 4 Pf. : x nach Regel 9.

4 Pfd. : 47 Pfd. = 2 Thlr. 12 Gr. 4 Pf. : x nach Regel 8.

4 Pfd. : 47 Pfd. = $\frac{361}{144}$ Thlr. : x nach Regel 7.

576 Pfd. : 47 Pfd. = 361 Thlr. : x nach Regel 9.

$x = \frac{47 \cdot 361}{576} = \frac{16967}{576}$ Thlr. = 29 Thlr. 10 Gr. $11\frac{1}{2}$ Pf.

nach Regel 11.

Zweites Beispiel.

Wenn 16 Arbeiter eine Mauer in 24 Tagen machen: wie viel Tage brauchen 22 Arbeiter, um diese Mauer zu Stande zu bringen?

22 Arb. : 16 Arb. = 24 Tage : x nach Regel 2 — 6.

11 Arb. : 8 Arb. = 24 Tage : x nach Regel 10.

$x = \frac{8 \cdot 24}{11}$ Tage $= \frac{192}{11}$ Tage =

17 Tage 10 Stunden $54\frac{6}{11}$ Min. nach Regel 11

Drittes Beispiel.

Wenn $8\frac{3}{4}$ Ctr. 63 Thlr. 12 Gr. kosten: was kosten 58 Pfd. 19 Loth?

$8\frac{3}{4}$ Ctr. : 58 Pfd. 19 Loth 63 Thlr. 12 Gr. : x nach Regel 2—6.
$\frac{35}{4}$ Ctr. : 58 Pfd. 19 Loth = 63 Thlr. 12 Gr. : x nach Regel 9.
$\frac{35}{4}$ Ctr. : $\frac{1875}{32}$ Pfd. = 63 Thlr. 12 Gr. : x nach Regel 7.
$\frac{35}{4}$ Ctr. : $\frac{1875}{3520}$ Ctr. = 63 Thlr. 12 Gr. : x nach Regel 6.
$\frac{35}{4}$ Ctr. : $\frac{1875}{3520}$ Ctr. = $\frac{127}{2}$ Thlr. : x nach Regel 7.
30800 Ctr. : 1875 Ctr. = $\frac{127}{2}$ Thlr. : x nach Regel 8.
61616 Ctr. : 1875 Ctr. = 127 Thlr. : x nach Regel 8.
$x = \frac{127 \cdot 1875}{61600}$ Thlr. = $\frac{238125}{61600}$ Thlr. =
3 Thlr. 20 Gr. $10\frac{47}{77}$ Pf. nach Regel 11.

Viertes Beispiel.

Wenn man zu einem Kleide 4 Ellen Tuch braucht, welches $8\frac{3}{4}$ Elle breit ist: wie viel Ellen $10\frac{1}{2}$ Elle breites Tuch braucht man zu demselben Kleide?

$10\frac{1}{2}$ Ell. : $8\frac{3}{4}$ Ell. = 4 Ell. : x nach Regel 2—6.
$\frac{21}{2}$ Ell. : $\frac{35}{4}$ Ell. = 4 Ell. : x nach Regel 9.
42 Ell. : 35 Ell. = 4 Ell. : x nach Regel 8.
21 Ell. : 35 Ell. = 2 Ell. : x nach Regel 10.
$x = \frac{35 \cdot 2}{21}$ Ellen = $\frac{70}{21}$ Ell. = $3\frac{1}{3}$ Ell. nach Regel 11.

Fünftes Beispiel.

Wenn man für 3 Thlr. 14 Gr. 78 Pfd. von einer Waare erhält: wie viel erhält man von dieser Waare für 21 Gr. $6\frac{1}{2}$ Pf.?

3 Thlr. 14 Gr. : 21 Gr. $6\frac{1}{2}$ Pf. = 78 Pfd. : x nach Regel 2–6.
86 Gr. : $\frac{517}{24}$ Gr. = 78 Pfd. : x nach Regel 7 und 6.
2064 Gr. : 517 Gr. = 78 Pfd. : x nach Regel 8.
1032 Gr. : 517 Gr. = 39 Pfd. : x nach Regel 10.
$x = \frac{517.39}{1032}$ Pfd. $= \frac{20163}{1032}$ Pfd. =
19 Pfd. $17\frac{27}{129}$ Loth nach Regel 11.

Sechstes Beispiel.

10 Menschen reichen mit einer gewissen Menge Lebensmittel 5 Wochen 3 Tage: wie lange werden 25 Menschen mit eben diesen Lebensmitteln reichen?

25 Mensch. : 10 Mensch. = 5 W. 3 T. : x nach Regel 2—6.
25 Mensch. : 10 Mensch. = 38 T. : x nach Regel 7.
$x = \frac{10.38}{25}$ Tage $= \frac{2.38}{5}$ Tage =
$\frac{76}{5}$ Tage = 15 Tage $4\frac{4}{5}$ St.

Siebentes Kapitel.

Ein Bote macht täglich 7 Meilen, und erreicht so einen Ort in 54 Tagen: wie viel braucht er, um diesen Ort zu erreichen, wenn er täglich 1 Meile mehr, also 8 Meilen macht?

8 Meil. : 7 Meil. = 54 T. : x nach der Regel 2 — 6.
4 Meil. : 7 Meil. = 27 T. : x nach Regel 10.
$x = \frac{7.27}{4}$ T. $= \frac{189}{4}$ T. $= 47\frac{1}{4}$ Tage nach Regel 11.

18. Giebt es nicht noch mancherlei Vortheile bei der Berechnung der Exempel, vermöge welcher sich die Rechnung abkürzen läßt?

Allerdings giebt es noch mancherlei kleine Rechnungsvortheile und Kunstgriffe, durch welche man die Rechnung verkürzen, und sich die Arbeit erleichtern kann. Sie können aber nicht gut ge-

lehrt, sondern müssen von selbst erlernt werden, welches auch leicht geschieht, wenn man sich in der Berechnung dergleichen Exempel recht übt. Nur 2 Vortheile, die man oft anwenden kann, mögen hier erwähnt werden.

1) In 8 ist die Regel aufgestellt, daß man die in den Gliedern der angesetzten Proportion vorkommenden Brüche wegschaffen, und alle Glieder der Proportion auf ganze Zahlen bringen solle. So vortheilhaft dies bisweilen ist, so sehr vergrößert und erschwert es doch oft die Rechnung. Man kommt oft weit leichter hinweg, wenn man die Brüche stehen läßt, und gleich nach Regel 11 die unbekannte Größe sucht. Z. B. das 1ste Exempel in 13 könnte man vortheilhaft so berechnen:

$\frac{2}{3}$ Pfd. : $\frac{5}{6}$ Pfd. = 3 Thlr. : x.

$x = \frac{5}{6} . 3$ d. i. $\frac{5.3}{6} : \frac{2}{3}$ d. i.

$\frac{5.3}{6} . \frac{3}{2} = \frac{5.3.3}{6.2}$ Gr. $= \frac{5.3}{2.2} =$

$\frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$ Gr. = 3 Gr. 9 Pf.

Eben so das zweite Exempel in 13.

$\frac{8}{11}$ Ell. : $\frac{21}{22}$ Ell. = $\frac{3}{4}$ Gr. : x.

$x = \frac{21}{22} . \frac{3}{4} : \frac{8}{11} = \frac{21.3}{22.4} . \frac{11}{8} =$

$\frac{21.3.11}{22.4.8} = \frac{21.3}{2.4.8} = \frac{63}{64}$ Gr.

Daß man auf diese Art sehr oft kürzer zum Ziele komme, ist keine Frage. Nur muß man dann die Rechnungsarten mit Brüchen recht in seiner Gewalt haben, und immer gleiche Factoren im Zähler und Nenner gegen einander wegstreichen.

2) Wenn im dritten Gliede der Proportion eine

ungleichbenannte Zahl vorkommt, im ersten und zweiten aber nicht; so braucht man sie nicht erst auf gleiche Benennung zu bringen, wie die 7te Regel vorschreibt; sondern man kann, mit Uebergehung dieser Regel, unmittelbar nach Regel 11 verfahren. Z. B.

8 Pfd. kosten 2 Thlr. 4 Gr. 3 Pf. : was kosten 5 Pfd.?

8 Pfd. : 5 Pfd. = 2 Thlr. 4 Gr. 3 Pf. : x.

$$x = \frac{(2\text{ Thlr. }4\text{ Gr. }3\text{ Pf.}).\,5}{8} = \frac{10\text{ Thlr. }21\text{ Gr. }3\text{ Pf.}}{8}$$

$= 1$ Thlr. 8 Gr. $7\frac{7}{8}$ Pf.

daß dieses ein wesentlicher Vortheil ist, erhellet leicht; nur muß man dann die Multiplication und Division ungleichbenannter Zahlen (Siehe Kap. 14) recht in seiner Gewalt haben.

19. Wie kann man sich überzeugen, ob man ein Exempel richtig berechnet hat?

Dies kann dadurch geschehen, daß man die Probe macht; denn so wie es bei den vier Rechnungsarten in ganzen und gebrochenen Zahlen Proben gab, so giebt es auch Proben der Regeldetri.

20. Wie macht man diese Proben?

Man kann auf mehr, als Eine Art prüfen, ob man ein Exempel richtig gerechnet hat.

1) Man setzt die für x gefundene Zahl, in die angesetzte Proportion, und zwar an die Stelle des x, d. h. in die Stelle des vierten Gliedes. Ist dieses geschehen, so untersuche man, ob die Proportion richtig ist; dies kann man,

wenn man entweder untersucht, ob die beiden Verhältnisse, die die Proportion bilden, einerlei Verhältnißnamen haben, also gleich sind; oder indem man untersucht, ob das Product der äußern Glieder der Proportion dem Producte der mittlern Glieder gleich ist. Z. B. wenn wir das letzte Exempel beibehalten, so hieß die angesetzte Proportion:

$\frac{8}{11}$ Ell. : $\frac{21}{22}$ Ell. = $\frac{3}{4}$ Gr. : x.

Für x fanden wir $\frac{63}{64}$ Gr. Setzen wir dieses in der Proportion für x, so kommt:

$\frac{8}{11}$ Ell. : $\frac{21}{22}$ Ell. = $\frac{3}{4}$ Gr. : $\frac{63}{64}$ Gr.

Um zu sehen ob die Proportion richtig sey, untersucht man, ob die beiden Verhältnisse einerlei Verhältnißnamen haben. Dies geschieht bekanntlich, indem das 2te Glied in jedem Verhältnisse durch das erste dividirt wird; nämlich:

$\frac{21}{22} : \frac{8}{11} = \frac{21}{22} \cdot \frac{11}{8} = \frac{21 \cdot 11}{22 \cdot 8} = \frac{21}{2 \cdot 8} = \frac{21}{16}$. Verhältnißname des ersten Verhältnisses.

$\frac{63}{64} : \frac{3}{4} = \frac{63}{64} \cdot \frac{4}{3} = \frac{63 \cdot 4}{64 \cdot 3} = \frac{63}{16 \cdot 3} = \frac{21}{16}$. Verhältnißname des zweiten Verhältnisses.

Die Verhältnißnamen beider Verhältnisse sind also gleich, folglich sind die Verhältnisse selbst gleich, und die Proportion ist richtig; und wir haben für die unbekannte Zahl x den richtigen Werth gefunden.

Eben so könnte man, um die Richtigkeit der Proportion zu prüfen, untersuchen, ob das Product der äußern Glieder derselben dem Producte der mittlern Glieder gleich seyn; nämlich:

$\frac{8}{11} \cdot \frac{63}{64} = \frac{8 \cdot 63}{11.64} = \frac{63}{11.8} = \frac{63}{88}$. Product der äußern Glieder.

$\frac{21}{22} \cdot \frac{3}{4} = \frac{21.3}{22.4} = \frac{63}{88}$. Product der mittlern Glieder.

Das Product der äußern Glieder ist also dem Producte der mittlern Glieder gleich, folglich die Proportion richtig, und es ist für die unbekannte Zahl x der richtige Werth gefunden.

2) Man kann aber auch folgendermaßen die Rechnung prüfen:

Man kehrt nämlich die Aufgabe um, und sucht ein anderes Glied der Proportion. Z. B. bei dem vorigen Exempel fanden wir: wenn $\frac{8}{11}$ Ell. 3 Gr. kosten, so kosten $\frac{21}{22}$ Ell. $\frac{63}{64}$ Gr. Man thue nun, als ob man nicht wüßte, was $\frac{8}{11}$ Ellen kosten, und frage: wenn $\frac{21}{22}$ Ell. $\frac{63}{64}$ Gr. kosten: was kosten $\frac{8}{11}$ Ellen? War vorhin richtig gerechnet, so muß man für die gesuchte Zahl $\frac{3}{4}$ Gr. erhalten. Nämlich:

$\frac{21}{22}$ Ell. : $\frac{8}{11}$ Ell. = $\frac{63}{64}$ Gr. : x

$x = \frac{8}{11} \cdot \frac{63}{64} = \frac{21}{22} = \frac{8 \cdot 63}{11.64} : \frac{21}{22} =$

$\frac{8 \cdot 63}{11.64} \cdot \frac{22}{21} = \frac{8 \cdot 63.22}{11.64.21}$ Gr. =

$\frac{63.2}{8.21}$ Gr. = $\frac{126}{168}$ Gr. = $\frac{3}{4}$ Gr.

Wir fanden also für x richtig $\frac{3}{4}$ Gr., und dies ist offenbar ein Beweis, daß wir vorhin richtig gerechnet hatten. Bei dieser 2ten Art muß man sich aber vor jeder Irrung sorgfältig hüten.

Sieben und zwanzigstes Kapitel.

Von der zusammengesetzten Regeldetri; oder von der Regula quinque, septem, multiplex.

1. Was für ein Unterschied ist zwischen der einfachen und zusammengesetzten Regeldetri?

Der Unterschied ist der, daß in der einfachen Regeldetri die unbekannte Zahl vermittelst Eines bekannten Verhältnisses gefunden wurde; in der zusammengesetzten Regeldetri aber kommen mehr als 2 Verhältnisse vor, aus denen die unbekannte Zahl gefunden werden soll.

2. Wie läßt sich dieser Unterschied durch ein Beispiel deutlich machen?

Z. B. die Aufgabe: 3 Pflüge pflügen 4 Acker, wie viel Acker können 5 Pflüge in derselben Zeit pflügen? — gehört in die einfache Regeldetri; denn es ist nur ein Verhältniß bekannt, nämlich 3 Pflüge: 5 Pflügen, aus denen die unbekannte Zahl gefunden werden soll. — Aber wenn die Aufgabe so vorliegt: Mit 3 Pflügen kann man in 1 Tage 4 Acker pflügen: wie viel Acker kann man mit 5 Pflügen in 3 Tagen fertig machen? — so sind hier 2 Verhältnisse gegeben; nämlich 3 Pflüge: 5 Pflügen; und 1 Tag: 3 Tagen; und aus diesen beiden Verhältnissen soll die unbekannte Zahl gefunden werden. Denn der Werth, oder die Größe der unbekannten Zahl hängt hier offenbar nicht blos von der Anzahl der Pflüge ab; sondern

auch von den Zeiten. Diese letztere Aufgabe gehört also in die zusammengesetzte Regeldetri.

3. Können noch mehr als 2 Verhältnisse gegeben seyn?

Allerdings können auch noch mehr als 2 Verhältnisse gegeben seyn. Z. B. in der Aufgabe:

Wenn 3 Mann 10 Ruthen graben, in 7 Tagen vollenden, wenn sie täglich 10 Stunden arbeiten: wie viel Ruthen werden 12 Mann in 14 Tagen machen, wenn sie täglich 12 Stunden arbeiten? — sind offenbar 3 Verhältnisse gegeben, aus denen die unbekannte Zahl gefunden werden soll. Nämlich:

3 : 12 Verhältniß der Arbeiter.
7 : 14 = = = Tage.
10 : 12 = = = Stunden.

Eben so könnten auch 4 und noch mehr Verhältnisse gegeben seyn.

4. Wie theilt und benennt man gewöhnlich die zusammengesetzte Regeldetri?

Man theilt sie in den gewöhnlichen Rechenbüchern gewöhnlich ab in Regula quinque, d. h. die Regel von 5 Gliedern, wenn 5 Zahlen gegeben sind, und die sechste gesucht wird. Hier kommen immer 2 ganz bekannte Verhältnisse vor. Ferner in Regula septem, d. h. die Regel von 7 Gliedern, wenn 7 Zahlen gegeben sind, und die achte gesucht werden soll. Hier sind jedesmal 3 Verhältnisse ganz bekannt; wie z. B. in der vorhergehenden Aufgabe. Ferner in Regula novem, wenn aus 9 gegebenen Zahlen die 10te gesucht werden

soll u. s. w. Allgemein nennt man die zusammengesetzte Regeldetri auch wohl Regula multiplex, d. h. die Regel von vielen Gliedern. Diese Abtheilungen und Namen sind aber unnütz und überflüssig, weil für alle dieselben Vorschriften gelten. Wir fassen sie daher unter dem allgemeinen Namen zusammengesetzte Regeldetri zusammen.

5. Können nicht auch Aufgaben vorkommen, wo 6, 8 u. s. w. Zahlen gegeben sind, und die 7te, 9te u. s. w. Zahl gesucht wird?

Nein, dergleichen Aufgaben können nicht vorkommen; sondern die Anzahl der bekannten Zahlen muß immer ungerade seyn.

6. Was ist der Grund hiervon?

Der Grund hiervon ist, daß man es hier mit lauter Verhältnissen zu thun hat, deren jedes aus zwei Gliedern besteht; von dem einen Verhältniß aber nur das eine Glied gegeben ist, und das andere gesucht werden soll.

7. Wie verfährt man, um dergleichen Aufgaben, die in die zusammengesetzte Regeldetri gehören, aufzulösen?

Man bildet aus der Aufgabe so viele einfache Regeldetri = Exempel, als Verhältnisse gegeben sind; indem man den für die unbekannte Zahl aus dem ersten einfachen Regeldetrie = Exempel gefundenen Werth in dies zweite u. s. f. setzt.

8. Wie läßt sich dies durch ein Beispiel deutlich machen?

Wenn z. B. das Exempel zu berechnen gegeben ist:

Wenn 3 Arbeiter 10 Ruthen Graben in 7 Tagen vollenden, wenn sie täglich 10 Stunden arbeiten: wie viel Ruthen werden 12 Mann in 14 Tagen machen, wenn sie täglich 12 Stunden arbeiten? — so sind hier 3 Verhältnisse gegeben, nämlich:

3 : 12 Verhältniß der Arbeiter.
7 : 14 = = Tage.
10 : 12 = = Stunden.

Man bildet also aus der Aufgabe 3 einfache Regeldetri-Exempel, auf folgende Art:

I. Zuerst berechnet man, wie viel Ruthen 12 Arbeiter machen können, wenn 3 Mann 10 Ruthen machen, ohne auf die Tage und Stunden Rücksicht zu nehmen. Nämlich:

3 Arb. : 12 Arb. = 10 Ruth. : x.

$x = \frac{12 \cdot 10}{3}$ Ruth. = 40 Ruthen.

II. Wir haben also gesehen, daß, wenn die Arbeitszeit, und die Stunden, die jeden Tag gearbeitet werden, einerlei sind, die 12 Arbeiter 40 Ruthen machen können. Nun berechne man: wenn in 7 Tagen 40 Ruthen gemacht werden können: wie viel Ruthen können in 14 Tagen gemacht werden?

7 Tage : 14 Tagen = 40 Ruthen : x

$x = \frac{14 \cdot 40}{7}$ R. = 80 Ruthen.

Wir haben also nun gefunden: wenn 3 Arbeiter in 7 Tagen 10 Ruthen machen; so können 12 Arbeiter in 14 Tagen 80 Ruthen machen.

III. Nun berechne man ferner: wenn täglich 10 Stunden gearbeitet wird; so können 80 Ruthen

gemacht werden: wie viel Ruthen können gemacht werden, wenn täglich 12 Stunden gearbeitet wird?

10 R. : 12 St. = 80 R. : x.

$x = \frac{12 \cdot 80}{10}$ Ruthen = 96 Ruthen.

Wir haben also nun gefunden: Wenn 3 Arbeiter in 7 Tagen 10 Ruthen machen, wenn sie täglich 10 Stunden arbeiten: so können 12 Arbeiter in 14 Tagen, wenn sie täglich 12 Stunden arbeiten, 96 Ruthen machen; und die obige Aufgabe ist gelöst.

Dieses angegebene Verfahren ist zwar richtig und ganz sicher; aber doch etwas weitläuftig. Man kann daher ein anderes Verfahren anwenden, daß eben so sicher, und viel leichter zum Ziele führt.

8. Worin besteht dieses kürzere Verfahren?

Es besteht darin, daß man nicht so viele Exempel bildet, als Verhältnisse gegeben sind, sondern nur eine einzige Proportion, aus welcher die unbekannte Zahl gefunden wird.

9. Hat man bei diesem Verfahren noch außer den Regeln bei der einfachen Regeldetrie andere Regeln zu beobachten?

Eigentlich gelten dieselben Regeln wie bei der einfachen Regeldetri; jedoch machen sich, weil hier mehr als 1 Verhältniß gegeben ist, noch einige besondere Regeln nothwendig.

10. Wie heißt die erste Regel?

Erste Regel. Man unterscheide, wie bei der einfachen Regeldetri, die Angabe und die Frage. Z. B. in der vorigen Aufgabe: Wenn 3 Arbei-

ter in 7 Tagen 10 Ruthen machen, wenn sie täglich 10 Stunden arbeiten: wie viel Ruthen werden 12 Arbeiter in 14 Tagen, wenn sie täglich 12 Stunden arbeiten, machen? — ist

die Angabe: 3 Arb. mach. in 7 T., wenn sie tägl. 10 St. arb. 10 Ruth.
die Frage : 12 " " " 14 " " " " 12 " " wie viel Ruthen?

Eben so ist in der Aufgabe: Wenn 300 Ellen in 5 Wochen von 20 Arbeitern gemacht werden: wie viel Arbeiter sind nöthig, um 216 Ellen in 6 Wochen zu verfertigen?

Die Angabe : 300 Ell. werden gemacht in 5 W. von 20 Arbeitern.
Die Frage : 216 " " " " 6 " " wie viel Arb.?

11. Welches ist die zweite Regel?

Zweite Regel. Man untersuche, wie bei der einfachen Regeldetri, ob die angegebenen Dinge in geradem, oder in umgekehrtem Verhältnisse stehen. Nämlich im ersten Exempel sind die Ruthen in geradem Verhältniß mit der Zahl der Arbeiter, mit der Zahl der Tage, mit der Zahl der Stunden, die täglich gearbeitet werden. Denn je mehr Arbeiter, je mehr Ruthen werden fertig; je mehr Tage, je mehr Ruthen; je mehr Stunden täglich gearbeitet werden, desto mehr Ruthen werden fertig. Im zweiten Exempel sind die Arbeiter in geradem Verhältniß der Ellen (denn je mehr Arbeiter, desto mehr Ellen); aber in umgekehrtem Verhältniß der Wochen (denn je mehr Wochen bestimmt sind, eine gewisse Anzahl Ellen zu machen, desto weniger Arbeiter sind erforderlich). Dies muß man ja je-

desmal genau untersuchen, damit man hernach die Verhältnisse richtig ansetzen kann.

12. Welches ist die dritte Regel?

Dritte Regel. Man setze nun, wie bei der einfachen Regeldetri, die Zahl, welche mit der zu suchenden von einerlei Art ist, in das dritte Glied der Proportion; in die vierte Stelle aber x, oder die gesuchte Zahl. Dann setze man in die erste und zweite Stelle immer zwei der übrigen Größen von einerlei Art als Ein Verhältniß zusammen, und zwar alle unter einander. Dabei darf man die zweite Regel ja nicht aus der Acht lassen.

Z. B. das erste Exempel würde so stehen:

3 Arb. : 12 Arb.
7 Tage : 14 T.
10 Stund. : 12 St. } = 10 Ruthen : x.

Das zweite aber:

300 Ellen : 216 Ell.
6 Wochen : 5 W. } = 20 Arb. : x.

13. Wie heißt die vierte Regel?

Vierte Regel. Ist das Exempel auf diese Art angesetzt, so multiplicire man (nach 24, 29. 30). die ersten Glieder der Proportion mit einander, und eben so die zweiten Glieder. Beim ersten Exempel erhält man dann:

3 . 7 . 10 : 12 . 14 . 12 = 10 R. : x

d. i.

210 : 2016 = 10 R. : x.

Beim zweiten Exempel erhält man:

300 . 6 : 216 . 5 = 20 Arb. : x.

d. i.

1800 : 1080 = 20 Arb. : x.

14. Welches ist die fünfte Regel?

Fünfte Regel. Die so erhaltene Proportion behandle man nun nach den Regeln 6, 7, 8, 9 und 10 der einfachen Regeldetri. Bei den vorliegenden Exempeln braucht man nur die 10te Regel anzuwenden. Man erhält dann bei dem ersten Exempel:

7 : 672 = 1 : x;

bei dem zweiten hingegen:

1 : 12 = 1 Arb. : x.

15. Welches ist die sechste Regel?

Sechste Regel. Endlich berechne man die unbekannte Zahl x, wie die 11te Regel in der einfachen Regeldetri lehrt. Man multiplicire nämlich das zweite Glied mit dem dritten, und dividire dieses Product durch das erste Glied. Der Quotient, der denselben Namen erhält, den das dritte Glied hat, ist die gesuchte Zahl x.

Z. B. in dem ersten Exempel ist nun aus der letzten Proportion

$x = \frac{672 . 1}{7}$ Ruthen $= \frac{672}{7}$ Ruthen = 96 Ruthen,

wie früher;

in dem zweiten aber ist

$x = \frac{12 . 1}{1}$ d. i. 12 Arbeiter.

16. Werden diese bis jetzt gegebenen Regeln geändert, oder sind neue nöthig, wenn in der Aufgabe mehr als 3 Verhältnisse, oder mehr als 7 Zahlen als bekannt gegeben sind?

Nein die gegebenen Regeln werden nicht im Mindesten geändert, und es ist auch keine neue nöthig.

17. Wie lassen sich die gegebenen Regeln noch durch einige Beispiele deutlicher machen?

Erstes Beispiel.

Wenn man von 400 Pfunden auf 30 Meilen 35 Thlr. 6 Gr. Transport zahlen muß: wie viel Thaler wird man von 700 Pfunden auf 50 Meilen bezahlen müssen?

400 Pfd. : 700 Pfd.
30 M. : 50 M. } = 35 Thlr. 6 Gr. : x n. Regel 1–4.

12000 : 35000 = 35 Thlr. 6 Gr. : x nach Regel 4.
12 : 35 = 35 Thlr. 6 Gr. : x nach Regel 5 (vgl. 26, 15).
12 : 35 = 846 Gr. : x nach Regel 5 (vgl. 26, 12).
2 : 35 = 141 Gr. : x nach Regel 5 (vgl. 26, 15).
$x = \frac{141 \cdot 35}{2}$ Gr. $= \frac{4935}{2}$ Gr. $= 2467\frac{1}{2}$ Gr.
$= 102$ Thlr. 19 Gr. 6 Pf. nach Regel 6.

Zweites Beispiel.

Wenn 20 Arbeiter, die täglich 6 Stunden arbeiten, in 15 Wochen 300 Ellen machen: wie viel Ellen werden 36 Arbeiter, die täglich 8 Stunden arbeiten, in 36 Wochen machen?

20 Arb. : 36 Arb.
6 Stund. : 8 St. } = 300 Ell. : x nach Regel 1 — 4.
15 W. : 36 W.

1800 : 10368 = 300 Ell. : x nach Regel 4.
6 : 10368 = 1 Ell. : x nach Regel 5 (vgl. 26, 15).
$x = \frac{10368 \cdot 1}{6}$ Ell. $= \frac{10368}{6}$ Ell. $= 1728$ Ellen nach Regel 6.

Drittes Beispiel.

24 Arbeiter, die in jeder Woche 5 Tage, und täglich 9 Stunden arbeiten, verfertigen in 7 Wochen 215 Ellen: wie viel Arbeiter sind nöthig, um 500 Ellen in 3 Wochen zu machen, wenn sie in jeder Woche 6 Tage, und täglich 11 Stunden arbeiten sollen?

215 Ell. : 500 Ell.
6 T. : 5 T.
3 W. : 7 W.
11 St. : 9 St.
} = 24 Arb. : x nach Regel 1 — 4

42570 : 157500 = 24 Arb. : x nach Regel 4.

4257 : 15750 = 24 Arb. : x nach Regel 5 (vgl. 26, 15).

$$x = \frac{15750 \cdot 24}{4257} \text{ Arb.} = \frac{378000}{4257} \text{ Arb.}$$

$$= 88\frac{276}{473} \text{ Arb. nach Regel 6.}$$

Anm. Der Bruch hier zeigt an, daß zwischen 88 und 89 Arbeiter erforderlich sind; 88 wären zu wenig, und 89 zu viel. So muß man sich dergleichen Brüche, wenn sie irgendwo vorkommen, wo sie eigentlich nicht möglich sind, erklären.

Viertes Beispiel.

Es haben 14 Arbeiter in 4 Wochen, bei einer täglichen Arbeit von 8 Stunden, einen Graben 120 Fuß lang, 6 Fuß breit und $3\frac{1}{2}$ Fuß tief gegraben. Nun soll ein anderer Graben gezogen werden, der 315 Fuß lang, 9 Fuß breit und $4\frac{1}{2}$ Fuß tief seyn, und in 12 Wochen fertig werden soll. Wie viel Arbeiter sind bei einer täglichen Arbeit von 9 Stunden hierzu erforderlich?

12 Wochen : 4 W.
9 St. : 8 St.
120 F. l. : 315 F. l. } = 14 Arb. : x nach Reg: l 1—4.
6 F. br. : 9 F. br.
$3\frac{1}{2}$ F. t. : $4\frac{1}{2}$ F. t.

272160 : 408240 = 14 Arb. : x nach Regel 4.
3402 : 5103 = 14 Arb. : x nach Regel 5 (vgl. 26, 15).
$x = \frac{5103 \cdot 14}{3402}$ Arb. $= \frac{71442}{3402}$ Arb. = 21 Arbeiter
nach Regel 6.

18. Welcher Vortheile kann man sich bedienen, um sich die Arbeit zu erleichtern?

Man kann sich im Allgemeinen eben derselben Vortheile bedienen, wie bei der einfachen Regeldetri (vgl. 26, 18). Jedoch bietet sich uns bei der zusammengesetzten Regeldetri noch ein besonderer Vortheil dar, der uns die Arbeit oft sehr erleichtert.

19. Welches ist dieser Vortheil?

Dieser Vortheil besteht darin, daß man, wenn man die Proportion nach Regel 1 — 4 angesetzt hat, die Glieder der ersten Verhältnisse nicht wirklich mit einander multiplicirt, wie es die 4te Regel angiebt; sondern diese Multiplication blos andeutet, und dann weiter verfährt, wie es nöthig ist. Man erhält dann einen Divisionsausdruck, in welchem man die gleichen Factoren im Dividendus und Divisor gegen einander wegstreicht; oder diejenigen Factoren in beiden, die sich durch einerlei Zahl dividiren lassen, durch dieselbe dividirt. Daß man aber hier besonders aufmerksam und vorsichtig seyn müsse, sieht man leicht.

20. Wie läßt sich dies durch ein Beispiel deutlich machen?

Wenn wir z. B. das zweite der vorigen Beispiele nehmen, so war der Ansatz folgender:

$$\left.\begin{array}{l} 20 \text{ Arb.} : 36 \text{ Arb.} \\ 6 \text{ Stunden} : 8 \text{ St.} \\ 15 \text{ Wochen} : 36 \text{ W.} \end{array}\right\} = 300 \text{ Ell.} : x.$$

Hierauf wurden die ersten Glieder mit einander, und eben so die zweiten Glieder mit einander multiplicirt. Besser kommt man weg, wenn man diese Multiplication nicht wirklich verrichtet, sondern durch Multiplicationszeichen nur andeutet. Nämlich:

$$20 . 6 . 15 : 36 . 8 . 36 = 300 \text{ Ell.} : x.$$

Und nun ist

$$x = \frac{36 . 8 . 36 . 300}{20 . 6 . 15} \text{ Ell.}$$

In diesem Divisionsausdrucke kann man

1) die 300 im Dividenden, und die 15 im Divisor mit 15 dividiren. Man erhält in jenem statt 300 nun 20; in diesem 1, nämlich:

$$\frac{36 . 8 . 36 . 20}{20 . 6 . 1.} \text{ Ell.}$$

2) In diesem neuen Ausdrucke kann man die 20 im Dividenden gegen die 20 im Divisor wegstreichen; man erhält

$$\frac{36 . 8 . 36}{6 . 1} \text{ Ell.}$$

3) In dem jetzigen Divisionsausdrucke kann man wieder die eine 36 im Dividenden, und

die 6 im Divisor mit 6 dividiren; man erhält dann im Dividenden 6; und im Divisor 1. Nämlich:

$$\frac{36 \cdot 8 \cdot 6}{1 \cdot 1} \text{ Ell.}$$

Und dieser letzte Ausdruck ist nun

$= 36 \cdot 8 \cdot 6$ Ellen $= 1728$ Ellen, wie früher.

Da dieser Vortheil von ungemeinem Nutzen ist, so müssen sich Anfänger recht darin üben. — Es mögen noch einige Beispiele, auf diese Art berechnet, hier stehen.

1) Ein Balken, 4 Fuß lang, 3 Fuß breit und 2 Fuß dick, wiegt 2 Ctr.: wie viel wird ein anderer Balken von demselben Holze wiegen, der 20 Fuß lang, 8 Fuß breit und 5 Fuß dick ist?

$$\left.\begin{array}{l} 4 \text{ F. l.} : 20 \text{ F. l.} \\ 3 \text{ F. br.} : 8 \text{ F. br.} \\ 2 \text{ F. d.} : 5 \text{ F. d.} \end{array}\right\} = 2 \text{ Ctr.} : x.$$

$$4 \cdot 3 \cdot 2 : 20 \cdot 8 \cdot 5 = 2 \text{ Ctr.} : x.$$

$$x = \frac{20 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cancel{2}}{\cancel{4} \cdot 3 \cdot \cancel{2}} \text{ Ctr.} = \frac{20 \cdot 2 \cdot 5}{3} \text{ Ctr.}$$

$$= \frac{200}{3} \text{ Ctr.} = 66\tfrac{2}{3} \text{ Ctr.}$$

2) Wenn 6 Gesellen in 4 Wochen, wenn sie wöchentlich 4 Tage, und täglich 6 Stunden arbeiten, 16 Stücke Zeuch, jedes 24 Ellen lang, verfertigen: wie viel Stück werden 12 Gesellen in 10 Wochen machen, wenn sie jede Woche 5 Tage, und täglich 8 Stunden arbeiten, und ein Stück 48 Ellen lang seyn soll?

6 Gesell : 12 G.
4 Wochen : 10 W.
4 Tage : 5 T.
6 Stund. : 8 St.
48 Ellen : 24 Ell. } = 16 Stück : x.

6 . 4 . 4 . 6 . 48 : 12 . 10 . 5 . 8 . 24 = 16 Stück : x.

$$x = \frac{\text{Z}\,\text{Z}\,.\,10\,.\,5\,.\,\text{S}\,.\,\text{Z}\text{A}\,.\,1\text{S}4}{\text{S}\,.\,\text{A}\,\text{A}\,\text{S}\,.\,\text{A}\text{S}\text{Z}}\ \text{St.} = \frac{10\,.\,5\,.\,4}{3}\ \text{St.}$$

$$= \frac{200}{3}\ \text{St.} = 66\tfrac{2}{3}\ \text{Stück.}$$

21. Hat man nicht noch eine andere Art die Aufgaben in der zusammengesetzten Regula Detri aufzulösen, als die angegebene ist?

Man hat allerdings noch eine andere Art, dergleichen Exempel zu berechnen, die zwar von der angeführten im Grunde gar nicht unterschieden, sondern mit ihr einerlei ist, die aber doch ihres practischen Nutzens wegen bei Rechnungen nicht unvortheilhaft ist.

22. Wie verfährt man bei dieser andern Art?

Man verfährt, wie folgt:

1) Man unterscheidet, wie früher gelehrt worden, die Angabe von der Frage, und schreibt die Glieder der Frage so unter die Glieder der Angabe, daß immer Glieder von einerlei Namen unter einander zu stehen kommen. Wo die unbekannte Zahl hingehört, setzt man x. Z. B.

Wenn 24 Arbeiter, welche täglich 8 Stunden arbeiten, in 10 Tagen 9 Stücke Zeuch zu 1 Elle breit fertigen: wie viel Stücke

werden 30 Arbeiter in 12 Tagen, wenn sie täglich 10 Stunden arbeiten, und das Zeuch $1\frac{1}{2}$ Elle breit seyn soll, zu Stande bringen?

Angabe: 24 Arb. 8 St. 10 Tage 9 Stück 1 Elle br.
30 = 10 = 12 = x = $1\frac{1}{2}$ =

2) Nun schreibe man die unbekannte Zahl x hinter einen Strich, und die über ihr stehende Zahl rechts vor derselben. Z. B.

x | 9 Stück.

3) Nun schreibe man auf ähnliche Art alle übrigen Zahlen unter jene beiden Zahlen; jedoch so, daß allemal die Zahl in der Angabe auf diejenige Seite des Strichs zu stehen kommt, wo x steht, wenn ein gerades Verhältniß Statt findet; die Zahl in der Frage aber auf die andere Seite. Findet aber ein umgekehrtes Verhältniß Statt, so kommt die Zahl in der Frage auf die Seite des Strichs, wo x steht, und die Zahl in der Angabe auf die andere Seite. Nämlich:

x	9 Stück.
24	30 Denn je mehr Arbeiter, je mehr Stücke.
8	10 Je mehr Stunden, je mehr Stücke.
10	12 Je mehr Tage, je mehr Stücke.
$1\frac{1}{2}$	1 Je breiter die Stücke, desto weniger Stücke.

4) Nun streiche man gleiche Zahlen auf beiden Seiten weg; oder wenn sich eine Zahl auf der einen Seite und eine auf der andern durch einerlei Zahl dividiren läßt, so dividire man sie mit derselben. Nämlich:

x	9
1 ℔ ℔4	ℨ℘15
8	ɣ℘
ɣ℘	ɣ℔1
$1\frac{1}{2}$	1

Es tilgen sich hier nämlich zuerst 10 auf der rechten, und 10 auf der linken Seite. Ferner läßt sich 12 auf der rechten Seite und 24 auf der linken mit 12 dividiren; man erhält hier 2, und dort 1. Ferner läßt sich 2 auf der linken Seite und 30 auf der rechten Seite mit 2 dividiren; man erhält hier 15, und dort 1.

5) Nun multiplicire man die Glieder, die noch auf der rechten Seite stehen, mit einander; und eben so die Glieder, die noch auf der linken stehen. Das erstere Product wird nun durch das letztere dividirt, so ist der Quotient der Werth von x, oder die gesuchte Zahl. Nämlich:

x	9
1 ℔ ℔4	ℨ℘15
8	ɣ℘
ɣ℘	ɣ℔
$1\frac{1}{2}$	1

$$1.8.1\tfrac{1}{2} \qquad 9.15.1.$$

$$x = \frac{9.15.1}{1.8.1\frac{1}{2}} = \frac{9.15.1}{1.8.\frac{3}{2}} = \frac{9.15.1}{\frac{1.8.3}{2}}$$

$$= \frac{9.15.1}{\frac{24}{2}} = \frac{9.15.1}{12} = \frac{135}{12} = 11\tfrac{1}{4}\text{ Stück.}$$

Ein Paar Beispiele werden die Sache noch deutlicher machen:

1) Wenn man für 12 Ctr. 30 Meilen weit zu fahren 75 Thlr. bezahlt, was wird man bezahlen müssen, wenn 115 Ctr. 80 Meilen weit gefahren werden?

Angabe 12 Ctr. 30 Meilen 75 Thaler.
Frage 115 • 80 • x

x	75 25
1 30	2 80 Je mehr Meilen, desto mehr Thlr.
3 12	115 Je mehr Ctr., desto mehr Thaler.
3.1	2.75.115

$x = \frac{2.25.115}{3.1}$ Thlr. $= \frac{5750}{3}$ Thlr. $= 1916\frac{2}{3}$ Thlr.
$= 1916$ Thlr. 16 Gr.

2) 10 Arbeiter machen in 8 Tagen 30 Ellen von einer Mauer: wie viel Ellen werden 24 Arbeiter in 10 Tagen zu Stande bringen?

Angabe: 10 Arb. 8 Tage 30 Ellen
Frage: 24 • 10 • x •

x	30
10	24 3
18	10
1	30.3.

$x = \frac{30.3}{1} = 30 . 3 = 90$ Ellen.

23. Wie kann man bei Exempeln der zusammengesetzten Regeldetri die Probe machen?

Die Probe auf Exempel aus der zusammen-

gesetzten Regeldetri wird ganz auf ähnliche Art gemacht, wie bei der einfachen Regeldetri, vgl. 26, 20.

Acht und zwanzigstes Kapitel.

Von der Reductionsrechnung.

1. Was versteht man unter Reductionsrechnung?

Man versteht unter Reductionsrechnung diejenige Rechnung, welche Maaße, Gewichte, Münzen verschiedener Länder, wenn ihr Verhältniß zu einander bekannt ist, gegenseitig durch einander ausdrücken, oder in einander verwandeln lehrt.

2. Wie läßt sich dies durch ein Beispiel deutlich machen?

Wenn es z. B. bekannt ist, daß ein Rheinischer Gulden sich zu einem Thaler Sächsisch verhält wie 5 : 9, d. h. daß 9 Rheinische Gulden 5 Thlr. Sächsisch ausmachen, so kann hierdurch nun jede Anzahl von Rheinischen Gulden in Thaler, und umgekehrt, verwandelt werden. Die Rechnung, welche dies lehrt, heißt eben Reductionsrechnung?

3. Ist die Reductionsrechnung eine von der Regeldetri verschiedene Rechnung?

Nein, sie ist im Grunde von der Regeldetri nicht verschieden; sondern nur eine besondere Anwendung derselben.

4. Wie wird die Reductionsrechnung eingetheilt?

Sie wird eingetheilt in die einfache und zusammengesetzte.

5. Wenn ist die Reductionsrechnung einfach?

Die Reductionsrechnung heißt dann einfach, wenn das Verhältniß zweier Größen, die in einander verwandelt werden sollen, unmittelbar gegeben ist. So gehört z. B. folgende Aufgabe in die einfache Reductionsrechnung: Wenn 9 Rheinische Gulden 5 Thaler Sächsisch betragen, wie viel Thaler Sächsisch betragen 85 Rheinische Gulden? denn das Verhältniß des Rheinischen Gulden zum Sächsischen Thaler ist hier unmittelbar gegeben; denn da 9 Rh. Guld. 5 Thlr. Sächs. betragen, so verhält sich 1 Rh. Gulden zu 1 Thlr. Sächs. wie 5 : 9.

6. Wenn heißt die Reductionsrechnung zusammengesetzt?

Sie heißt dann zusammengesetzt, wenn das Verhältniß zwischen 2 in einander zu verwandelnden Größen nicht unmittelbar bekannt ist; sondern erst aus andern bekannten Verhältnissen, aus Zwischenverhältnissen abgeleitet werden muß. So gehört z. B. folgende Aufgabe in die zusammengesetzte Reductionsrechnung:

Wie viel Species-Thaler betragen 85 Rheinische Gulden, wenn 9 Rheinische Guld. 5 Thlr. Sächs., und 4 Thlr. Sächs. 3 Speciesthaler betragen? Denn das Verhältniß des Rh. Guld. zum Speciesthlr. ist nicht unmittelbar gegeben; sondern es muß erst aus bekannten Zwischenverhältnissen gefunden werden, nämlich aus dem Verhältnisse

des Rheinischen Guldens zum Sächs. Thaler, und des Sächs. Thalers zum Species Thaler, welche Verhältnisse als bekannt gegeben sind.

7. Woraus kann man die Verhältnisse der Maaße, Gewichte und Münzen der verschiedenen Länder zu einander ersehen?

Man kann dies blos aus Nachrichten sehen, die man in vielen Büchern findet. Das beste hierzu dienliche ist: Nelkenbrechers allgemeines Taschenbuch der Münz = Maaß = und Gewichtskunde für Banquiers und Kaufleute. Berlin, 1817.

8. Was hat man bei der einfachen Reductionsrechnung zu beobachten?

Bei der einfachen Reductionsrechnung, oder bei Aufgaben, wo das Verhältniß der zwei in einander zu verwandelnden Größen unmittelbar gegeben ist, hat man weiter nichts zu thun, als die Aufgabe nach den Regeln, die bei der einfachen Regeldetri gegeben wurden, anzusetzen, zu behandeln und zu berechnen.

9. Wie läßt sich dies an Beispielen zeigen?

Erstes Beispiel. Wenn 9 Rheinische Gulden 5 Thlr. Sächsisch betragen: wie viel Thaler Sächsisch betragen 85 Gulden Rheinisch?

Angabe: 9 Gulden Rheinisch machen 5 Thlr. Sächs.
85 = wie viel Thlr. Sächs.?

9 Guld. Rh. : 85 Guld. Rh. = 5 Thlr. Sächs. : x.

$x = \frac{85 \cdot 5}{9}$ Thlr. Sächs. $= \frac{425}{9} = 47\frac{2}{9}$ Thlr. Sächs.

85 Guld. Rh. sind also so viel, als $47\frac{2}{9}$ Thlr. Sächs.

Zweites Beispiel. Wenn 5 Thlr. Sächs.

9 Gulden Rh. ausmachen, was betragen $47\frac{2}{9}$ Thlr. Sächsisch?

5 Thlr. Sächs. : $47\frac{2}{9}$ Thlr. S. = 9 Guld. Rh. : x.
5 Thlr. S. : $\frac{425}{9}$ Thlr. S. = 9 Guld. Rh. : x.
45 Thlr. S. : 425 Thlr. S. = 9 Guld. Rh. : x.
9 Thlr. S. : 85 Thlr. S. = 9 Guld. Rh. : x.
1 Thlr. S. : 85 Thlr. S. = 1 Guld. Rh. : x.
$x = \frac{85 \cdot 1}{1}$ Guld. Rh. = 85 Guld. Rh.

Dieses Beispiel war das vorige umgekehrt, und beide dienen einander zur Probe.

Drittes Beispiel. Es ist bekannt, daß sich der Berliner Fuß zum Pariser verhält, wie 1373 : 1440 : wie viel betragen also 26 Paris. Fuß Berliner Fuß?

Da sich der Berliner Fuß zum Pariser Fuß verhält, wie 1373 : 1440; so machen 1440 Berliner Fuß 1373 Paris. F., und die Aufgabe steht nun so:
1373 Par. F. : 26 Par. F. = 1440 Berl. F. : x.
$x = \frac{26 \cdot 1440}{1373}$ Berl. F. = $\frac{37440}{1373} = 27\frac{369}{1373}$ Berl. F.

Viertes Beispiel. 15 deutsche Meilen machen 25 französische Meilen: wie viel französische Meilen betragen 9 deutsche Meilen?

15 deutsche Meil. : 9 d. M. = 25 franz. M. : x.
$x = \frac{9 \cdot 25}{15} = \frac{9 \cdot 5}{3} = \frac{45}{3} = 15$ franz. Meilen.

Fünftes Beispiel. Der Speciesthaler verhält sich zum Thaler, wie 17 : 12 : wie viel Speciesthlr. sind 28 Thlr. 6 Gr. 4 Pf.?

Da sich der Speciesthaler zum Thaler verhält wie 17 : 12, so machen 17 Thlr. 12 Speciesthlr., und das Exempel steht:

17 Thlr. : 28 Thlr. 6 Gr. 4 Pf. : 12 Specthlr. : x.

17 Thlr. : $\frac{2035}{72}$ Thlr. = 12 Specthlr. : x.

1224 Thlr. : 2035 Thlr. = 12 Specthlr. : x.

$x = \frac{2035.12}{1224} = 19\ \frac{97}{102}$ Specthlr.

10. Wie verfährt man bei Aufgaben aus der zusammengesetzten Reductionsrechnung?

Bei der zusammengesetzten Reductionsrechnung, oder bei Aufgaben, wo das Verhältniß zweier in einander zu verwandelnden Größen nicht unmittelbar gegeben ist, sondern erst aus bekannten Zwischenverhältnissen abgeleitet werden muß, bestimmt man zuerst das Verhältniß der zu verwandelnden Größen zu einander; und dann wird die Aufgabe durch ein einfaches Regeldetri = Exempel aufgelöst.

11. Wie läßt sich dies durch ein Beispiel deutlich machen?

Wenn z. B. die Aufgabe vorliegt:

Wenn 9 Gulden Rheinisch 5 Thlr. Sächs. betragen, und 4 Thlr. Sächs. 3 Specthlr. : wie viel Specthlr. betragen 72 Rh. Gulden? — so muß man zuerst das Verhältniß des Rheinischen Guldens zum Specthlr. aus den Zwischenverhältnissen, nämlich aus dem Verhältniß des Rheinischen Guldens zum Sächs. Thaler, und des Sächs. Thalers zum Speciesthlr., bestimmen. Dann erhält man ein einfaches Regeldetri = Exempel.

12. Wie kann man das Verhältniß der zu verwandelnden Größen aus den gegebenen Zwischenverhältnissen bestimmen?

Dies geschieht auf folgende Art:

Man setzt das erste Glied des gesuchten Ver-

hältnisses zum ersten Zwischengliede in dem gegebenen Verhältnisse an, unter dieses das erste Zwischenglied zu dem zweiten u. s. f.; endlich das letzte Zwischenglied zu dem zweiten Gliede des gesuchten Verhältnisses. Wenn man nun diese Proportionen nach 24, 30. Anm. zusammensetzt, wodurch alle Zwischenglieder wegfallen; so hat man das gesuchte Verhältniß.

13. Wie läßt sich dies an einem Beispiele zeigen?

Nehmen wir das vorige Beispiel, so soll das Verhältniß des Rheinischen Gulden zum Speciesthaler gefunden werden. Da 9 Gulden Rheinisch 5 Thlr. Sächs., so verhält sich

1 Gulden Rh. : 1 Thlr. Sächs. = 5 : 9.

Da ferner 4 Thlr. Sächs. 3 Speciesthlr. betragen, so verhält sich 1 Thlr. Sächs. : 1 Spcthlr. = 3 : 4. Setzt man diese beiden Proportionen unter einander, nämlich:

1 Gulden Rh. : ¼ Thlr. Sächs. = 5 : 9
¼ Thlr. Sächs. : 1 Spcthlr. = 3 : 4

1 Guld. Rh. : 1 Spcthlr. = 15 : 36

und multiplicirt sie nach 24, 30; so fällt das Zwischenglied 1 Thlr. Sächs. hinweg; und man erhält das Verhältniß des Rheinischen Guldens zum Spcthlr.; jener verhält sich nämlich zu diesem, wie 15 : 36., d. h. 36 Rh. Gulden sind 15 Spcthlr. Will man nun wissen, wie viel Spcthlr. 72 Rh. Gulden sind (was in der Aufgabe oben verlangt wurde), so bedarf es nur eines einfachen Regeldetri-Exempels. Nämlich:

36 Rh. Guld. : 72 Rh. = 15 Spcthlr. : x.

$x = \frac{72.15}{36}$ Spcthlr. = $\frac{2.15}{1}$ Spcthlr. = 30 Spcthlr.

14. Pflegt man dergleichen Aufgaben so zu berechnen?

Nein; man berechnet dergleichen Aufgaben, die in die zusammengesetzte Reductionsrechnung gehören, gewöhnlich nach der Kettenregel, von welcher das nächste Kapitel handelt. Deswegen wollen wir keine Beispiele weiter anführen, sondern es dabei bewenden lassen, die Art und Weise der Berechnung gezeigt zu haben.

Neun und zwanzigstes Kapitel.

Von der Kettenregel.

1. Was ist die Kettenregel für eine Rechnung?

Die Kettenregel (Kettenrechnung) ist nichts anders, als die Anwendung der zusammengesetzten Regeldetri auf solche Aufgaben, in welchen das Verhältniß zweier Größen nicht unmittelbar bekannt ist; sondern erst durch andere bekannte Zwischenverhältnisse gefunden werden kann.

2. Wie hat man bei dieser Rechnung zu verfahren?

Die allgemeine Regel heißt:

Man setze links hinter einen Strich die unbekannte Zahl x, und neben ihr rechts vor den Strich diejenige Zahl, welche zur Frage gehört; unter x diejenige Zahl, welche mit der rechts gestellten gleichen Namen führt; und neben solche

rechts diejenige, welche ihr am Werthe gleich ist; und wieder links die, welche mit der letzten rechts gleichen Namen führt, und rechts wieder die der letzten am Werthe gleiche Zahl u. s. f., bis man zuletzt rechts eine Zahl erhält, welche mit der letzten links von gleichem Werthe, und mit der unbekannten Zahl x von gleicher Benennung ist.

3. Wie läßt sich die allgemeine Regel durch ein Beispiel deutlich machen?

Wenn man z. B. folgende Aufgabe:

Wie viel baiersche Fuß sind 100 englische Fuß, wenn 81 englische Fuß gleich sind 76 paris. Fuß; 29 par. Fuß gleich 30 rheinländischen, und 930 rheinländische gleich 1000 baierischen Fußen? — nach der Kettenregel berechnen sollte, so verfahre man, der angeführten allgemeinen Regel gemäß, wie folgt:

Man schreibe die unbekannte Zahl, also x baierische Fuß, links hinter einen Strich, und neben ihr rechts vor dem Strich die Zahl, die zur Frage gehört, also 100 englische Fuß; unter x diejenige Zahl, welche mit der rechts gestellten, mit 100 englischen Fuß, gleichen Namen führt, also 81 englische Fuß; neben diese rechts diejenige Zahl, welche mit ihr gleichen Werth hat, nämlich 76 par. Fuß. Unter 81 englischen Fuß schreibe man nun ferner diejenige Zahl, welche mit der letzten rechts, also mit 76 par. Fuß, gleichen Namen führt, nämlich 29 par. Fuß; neben diese rechts die Zahl, die mit ihr von gleichem Werthe ist, nämlich 30 rheinländische Fuß; links unter sie aber die Zahl,

welche mit der letzten rechts gleichen Namen hat, also 930 rheinländische Fuß; und nun endlich links neben diese 1000 baierische Fuß. Da diese letzte Zahl rechts mit der letzten Zahl links von gleichem Werthe und mit der unbekannten x von gleicher Benennung ist, so ist der Ansatz geendigt. Nämlich:

baierſche Fuß . x	100 engliſche Fuß.
engliſche Fuß 81	76 pariſer F.
pariſer Fuß 29	30 rheinländiſche F.
rheinländiſche Fuß 930	1000 baierſche F.

4. Was hat man nun nach dieſem Anſatze weiter zu thun?

Man multiplicirt nun alle Zahlen, die auf der einen Seite des Strichs ſtehen, mit einander, und eben ſo diejenigen Zahlen, welche auf der andern Seite des Strichs befindlich ſind. Mit der Seite, auf welcher die unbekannte Größe x ſteht, dividirt man nun in die andere Seite, ſo iſt der Quotient die geſuchte Zahl. Ehe man aber die Multiplication wirklich verrichtet, kann man, um die Rechnung ſich zu erleichtern, erſt diejenigen Zahlen auf beiden Seiten, die entweder gleich ſind; oder ſich durch einerlei Zahl dividiren laſſen, im erſten Falle ganz wegſtreichen; im zweiten durch dieſe Zahl dividiren. Das obige angeſetzte Beiſpiel würde nun hiernach ſo berechnet werden:

x	100
81	76
29	ʒØ
31 ØʒØ	1000

81 . 29 . 31 | 100 . 76 . 1000

$x = \frac{100.76.1000}{81.29.31.} = \frac{7600000}{72819}.$

$= 104\frac{26824}{72819}$ baiersche Fuß.

Man beobachte noch folgende Beispiele:

1) Wenn 4 Fränk. Gulden gleich sind 5 Rhein. Gulden. 9 Rh. Guld. gleich 5 Thlr. Sächs.; 8 Thlr. Sächs. gleich 7 Thlr. Hannöverischem Kassengeld: was werden 600 Fränk. Gulden in Hannöverischem Kassengelde betragen?

Thlr. Kassengeld	x	$\overset{7}{\overset{5}{Ø}}ØØ$ Frk. Guld.
Frk. Guld.	4	5 Rhein. Guld.
Rhein. Guld.	9	5 Thlr. Sächs.
Thlr. Sächs.	8	7 Thlr. Kassengeld.

4 . 9 | 75 . 5 . 5 . 7

$x = \frac{75.5.5.7}{4.9} = \frac{13125}{36}.$

$= 364$ Thlr. 14 Gr. Kassengeld.

2) Wenn in Bremen 60 Pfd. Kaffee 24 Thlr. Kassengeld kosten; $4\frac{2}{3}$ Thlr. Kassengeld aber $5\frac{1}{3}$ Thlr. Gold betragen, und 5 Thlr. Gold 9 Gulden Rheinisch ausmachen: was wird 1 Pfd. Kaffee in Gulden Rheinisch kosten?

Rhein. Guld. x	1 Pfd. Kaffee.
Pfd. Kaffee 5ℳ	$2\frac{2}{4}$ Thlr. Kaffengeld.
Thlr. Kaffengeld $4\frac{2}{3}$	$5\frac{1}{3}$ Thlr. Gold.
Thaler Gold 5	9 Guld. Rheinisch.
$5 . 4\frac{2}{3} . 5$	$1 . 2 . 5\frac{1}{3} . 9$.

$$x = \frac{1 . 2 . 5\frac{1}{3} . 9}{5 . 4\frac{2}{3} . 5.} = \frac{2 . \frac{16}{3} . 9}{5 . \frac{14}{3} . 5} = \frac{2 . 16 . 9}{5 . 14 . 5.}$$

$= \frac{288}{350}$ Guld. Rh. $= 49\frac{13}{35}$ Kreutzer.

3) Wie viel kostet 1 Pfd. Kaffee Leipziger Gewicht in Sächs. Groschen, wenn 100 Pfd. Kaffee Amsterdamer Gewicht 120 Holl. Guld. kosten, und 5 Holl. Guld. gleich sind 2 Holl. Thlr.; 100 Holländ. Thaler gleich 47 Holländ. Duc.; 6 Duc. gleich 17 Thlr. Sächs., und 1 Thlr. Sächs. gleich 24 Gr.; ferner 56 Amsterd. Pfunde gleich 57 Hamburger; und 27 Pfd. Hamb. gleich 28 Pfd. Lpz.?

Sächs. Grosch. x	1 Pfd. Lpz. Gew.
Leipziger Gew. ℔	27 Pfd. Hamb. Gew.
Hamb. Gew. 57	8ℳ Pfd. Amsterd. Gew.
Amsterd. Gew. $\frac{5}{1}$ ℳ	3ℳ Guld. Holl.
Guld. Holld. 5	℔ Thlr. Holl.
Thlr. Holld. 1ℳ	47 Duc. Holl.
Duc. Holld. $\frac{25}{1}$ ß	17 Thlr. Sächs.
Thlr. Sächs. 1	ß℔ Gr. Sächs.
57 . 5 . 5 . 25 . 1	1 . 27 . 8 . 3 . 47 . 17.

$$x = \frac{1 . 27 . 8 . 3 . 47 . 17}{57 . 5 . 5 . 25 . 1} \text{ Gr.} = \frac{517752}{35625} \text{ Gr.}$$

$= 14$ Gr. $6\frac{4758}{11875}$ Pf.

4) Was kosten in Leipzig 149 Pfd. Safran,

wenn das Pfd. in Amsterdam 44 Gulden kostet, wenn 95 Pfd. Amsterd. gleich sind 100 Pfd. Lpz., und wenn 1 Thlr. Konventionsgeld $37\frac{1}{4}$ Stüver gilt, und 20 Stüver 1 Guld. sind?

Thaler x	149 Pfd. Lpz.
ß	x 9
Pf. Leipziger ƴ ØØ	ØS Pfd. Amsterd.
Pf. Amsterd. 1	44 Guld.
Guld. 1	2Ø Stüver
Stüver $37\frac{1}{4}$	1 Thlr. Konvent.
$37\frac{1}{4}.1.1.$	149.19.44.1

$$x = \frac{149.19.44.1}{37\frac{1}{4}.1.1} \text{ Thlr.} = \frac{149.19.44}{\frac{149}{4}} =$$

$$149.19.44 : \frac{149}{4} = \frac{149.19.44}{1} : \frac{149}{4}$$

$$= \frac{149.19.44}{1} \cdot \frac{4}{149} = \frac{149.19.44.4}{1.149.} =$$

$$19.44.4 = 3344 \text{ Thlr.}$$

5. Wem gewährt die Kettenregel besonders Vortheil?

Die Kettenregel gewährt besonders dem Kaufmanne großen Vortheil, der alle seine Wechsel- und andere Rechnungen darnach berechnen kann. Man sieht dies auch schon an den gegebenen Beispielen.

Dreißigstes Kapitel.

Die Gesellschaftsrechnung.

1. Was versteht man unter der Gesellschaftsrechnung?

Unter der Gesellschaftsrechnung versteht man

die Anwendung der Regeldetri auf solche Rechnungen, wo ein Ganzes in ungleiche Theile von gegebenen Verhältnissen getheilt werden soll.

2. Wenn können dergleichen Rechnungen, wo ein Ganzes in ungleiche Theile von gegebenen Verhältnissen getheilt werden soll, vorkommen?

Dergleichen Rechnungen kommen im gemeinen Leben sehr häufig vor. Wenn z. B. 1000 Mann Soldaten in drei Dörfer vertheilt werden sollen und zwar nach der Anzahl der Häuser eines jeden Dorfs, und wenn das erste Dorf 60, das zweite 40 und das dritte 100 Häuser hat: so muß man die 1000 Soldaten in 3 Theile theilen, aber natürlich nicht in 3 gleiche Theile; sondern in 3 ungleiche Theile, die sich zu einander gerade so verhalten wie die Häuserzahl der 3 Dörfer zu einander. Wie dies nun geschehen könne, lehrt eben die Gesellschaftsrechnung.

3. Wenn kommen dergleichen Theilungen mit Ganzen in ungleiche Theile von gegebenen Verhältnissen besonders häufig vor?

Sie kommen besonders dann vor, wenn mehrere Personen zu einer gemeinschaftlichen Unternehmung in eine Gesellschaft zusammentreten, und eine gemeinschaftliche Kasse errichten, wozu die einzelnen Mitglieder verschiedene Beiträge liefern. Soll alsdann der Gewinn oder Verlust der ganzen Unternehmung getheilt werden, so muß er nach Verhältniß der Beiträge der einzelnen Mitglieder getheilt werden. Wenn z. B. 3 Kaufleute in eine Gesellschaft zusammentreten, und ein Kapital zu-

sammenschießen, wozu der eine 1000 Thlr., der andere 1500, und der dritte 800 geben, und sie gewinnen damit 600 Thlr.: so muß dieser Gewinn, wenn er getheilt werden soll, in 3 Theile getheilt werden, die sich zu einander eben so verhalten, wie die einzelnen Beiträge zu einander. Denn natürlich muß der zweite, da sein Beitrag größer war, als der der beiden übrigen, auch vom Gewinne mehr erhalten als diese; und eben so muß der erste mehr erhalten, als der dritte. Wie dieser Gewinn nun nach Verhältniß der Beiträge getheilt werden kann, lehrt die Gesellschaftsrechnung, und sie hat eben von dieser Art der Anwendung ihren Namen erhalten. Man nennt sie in dieser Hinsicht auch wohl Gewinn- und Verlustrechnung.

4. Wie wird die Gesellschaftsrechnung eingetheilt?

Sie wird eingetheilt in die einfache und zusammengesetzte Gesellschaftsrechnung.

5. Wenn heißt die Gesellschaftsrechnung einfach?

Die Gesellschaftsrechnung heißt dann einfach, wenn die einzelnen Verhältnisse, nach denen ein Ganzes getheilt werden soll, ohne Nebenbestimmungen gegeben sind. So gehört z. B. die Aufgabe: 3 Kaufleute legen zu einer gewissen Unternehmung zusammen, der erste 100 Thlr., der zweite 140 Thlr., und der dritte 160 Thlr. Sie gewinnen damit 150 Thlr.: was wird ein jeder erhalten? — in die einfache Gesellschaftsrechnung, denn die Verhältnisse, nach denen der Gewinn

150 Thlr. getheilt werden soll, sind durch die Einlagen der Einzelnen gegeben, ohne daß noch eine Nebenbestimmung hinzugefügt ist.

6. Wenn heißt die Gesellschaftsrechnung zusammengesetzt?

Die Gesellschaftsrechnung heißt dann zusammengesetzt, wenn außer den Verhältnissen, nach denen ein Ganzes getheilt werden soll, noch Nebenbestimmungen oder Nebenverhältnisse gegeben sind. So gehört z. B. die Aufgabe: 4 legen einen gemeinschaftlichen Handel an; der erste giebt 300 Thlr. auf 2 Jahre, der zweite 200 Thlr. auf 3 Jahre; der dritte 500 Thlr. auf 1 Jahr, und der vierte 250 Thlr. auf 3 Jahr: sie gewinnen damit 960 Thlr.: wie viel wird jeder erhalten? — Hier sind außerdem durch die einzelnen Beiträge gegebenen Verhältnisse, nach denen der Gewinn von 960 Thlr. getheilt werden soll, noch Nebenbestimmungen oder Nebenverhältnisse durch die Zeiten, auf welche die einzelnen Beiträge gegeben würden, gegeben. Denn offenbar darf der Gewinn nicht blos nach den verschiedenen Beiträgen der Einzelnen getheilt werden, sondern auch nach den verschiedenen Zeiten, auf welche sie ihre Beiträge gaben.

7. Wie hat man zu verfahren, um dergleichen Aufgaben, die in die einfache Gesellschaftsrechnung gehören, aufzulösen?

Das Verfahren ist folgendes:

Man addirt die einzelnen Zahlen, welche die Verhältnisse, nach denen das Ganze getheilt werden

soll, ausdrücken (z. B. die einzelnen Beiträge oder zusammengelegten Gelder), und setze ihre Summe in das erste Glied der Proportion; jede einzelne Verhältnißzahl aber der Reihe nach in das zweite Glied, und dann in das dritte die zu theilende Größe, und in das vierte Glied endlich x. Man erhält auf diese Art so viele einfache Regeldetri-Exempel, als Verhältnißzahlen gegeben sind (z. B. so viele, als Theilnehmer der Gesellschaft vorhanden sind).

8. Wie läßt sich dies Verfahren an einem Beispiele deutlicher zeigen?

Wenn z. B. die Aufgabe vorliegt: 4 Personen fangen einen Getraidehandel an. Die erste giebt 100 Thlr., die zweite 130 Thlr., die dritte 75 Thlr. und die vierte 200 Thlr. Sie gewinnen damit 200 Thlr. : wie viel wird jeder von diesem Gewinne erhalten? — so sind die Zahlen, welche die Verhältnisse angeben, nach welchen der Gewinn von 200 Thlr. getheilt werden soll, 100, 130, 75, 200. Diese werden nun zusammen addirt, und in das erste Glied der Proportion gesetzt; und man schließt nun:

1) wie sich die ganze Einlage verhält zu der Einlage des ersten, so verhält sich auch der ganze Gewinn zum Gewinne der ersten; also:

$$505 : 100 = 200 : x.$$

$$x = \frac{100.200}{505} = \frac{20000}{505} = 39\frac{61}{101}$$ Thlr. Gewinn des ersten.

2) Wie sich verhält die ganze Einlage zu der Einlage des zweiten; so verhält sich auch der

ganze Gewinn zu dem Gewinne des zweiten; also:

$$505 : 130 = 200 : x.$$

$x = \frac{130.200}{505} = \frac{26000}{505} = 51\frac{49}{101}$ Thlr. Gewinn des zweiten.

3) Wie sich die ganze Einlage verhält zu der Einlage des dritten; so verhält sich auch der ganze Gewinn zum Gewinne des dritten; also:

$$505 : 75 = 200 : x.$$

$x = \frac{75.200}{505} = \frac{15000}{505} = 29\frac{71}{101}$ Thlr. Gewinn des dritten.

4) Wie sich die ganze Einlage verhält zur Einlage des vierten, so verhält sich auch der ganze Gewinn zum Gewinne des vierten; also:

$$505 : 200 = 200 : x.$$

$x = \frac{200.200}{505} = \frac{40000}{505} = 79\frac{21}{101}$ Thlr. Gewinn des vierten.

9. Wie kann man sich die Rechnung oft erleichtern?

Wenn die Verhältnißzahlen sich alle durch einerlei Zahl dividiren lassen, so dividire man sie damit, ehe man die Berechnung selbst anfängt. Hierdurch wird das Verhältniß der Zahlen gegen einander nicht im Mindesten geändert. Z. B.

3 Kaufleute legen zusammen; der erste 1000 Thlr., der zweite 2000 Thlr., und der dritte 4000 Thlr. Sie verlieren aber 1500 Thlr.: wie viel muß jeder vom Verluste tragen? Die Beiträge der Einzelnen lassen sich hier mit 1000 dividiren; man erhält dann der Reihe nach zu Verhältnißzah-

len 1, 2, 4. Nun verfährt man, wie gezeigt wor=den; nämlich:

1
2
4
7 Summe der Verhältnißzahlen.

1) 7 : 1 = 1500 Thlr : x.

$x = \frac{1500}{7}$ Thlr. $= 214\frac{2}{7}$ Thlr. Verlust des ersten.

2) 7 : 2 = 1500 Thlr. : x.

$x = \frac{1500.2}{7}$ Thlr. $= \frac{3000}{7}$ Thlr. $= 428\frac{4}{7}$ Thlr.
Verlust des zweiten.

3) 7 : 4 = 1500 Thlr : x.

$x = \frac{4.1500}{7}$ Thlr. $= \frac{6000}{7}$ Thlr. $= 857\frac{1}{7}$ Thlr.
Verlust des dritten.

10. Was ist zu merken, wenn die Verhältnißzahlen Brüche sind?

Es ist im Grunde nichts besonderes zu bemerken, und man verfährt, wie oben gezeigt wor=den. Z. B.

800 Thlr. sollen nach Verhältniß der Zahlen $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ und $\frac{2}{3}$ getheilt werden.

$\frac{1}{2}$	$\frac{6}{12}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{12}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{12}$

$\frac{23}{12}$ Summe der Verhältnißzahlen.

1) $\frac{23}{12} : \frac{1}{2} = 800$ Thlr. : x.

$x = 800 \cdot \frac{1}{2} = \frac{800.1}{2} : \frac{23}{12} = \frac{800.1}{2} \cdot \frac{12}{23}$

$= \frac{800.1.12}{2.23} = \frac{9600}{46} = 208\frac{16}{23}$ Thlr. erster Theil.

2) $\frac{23}{12} : \frac{3}{4} = 800$ Thlr. : x

$x = 800 \cdot \frac{3}{4} = \frac{800.3}{4} : \frac{23}{12} = \frac{800.3}{4} \cdot \frac{12}{23}$

$= \frac{800.3.12}{4.23} = \frac{800.3.3}{23} = \frac{7200}{23} =$

$313\frac{1}{23}$ Thlr. zweiter Theil.

3) $\frac{23}{12} : \frac{2}{3} = 800$ Thlr. : x

$x = \frac{2}{3} . 800$ d. i. $\frac{2.800}{3} : \frac{23}{12} = \frac{2.800}{3} . \frac{12}{23}$

$= \frac{2.800.12}{3.23} = \frac{2.800.4}{23} = \frac{6400}{23}$

$= 278\frac{6}{23}$ Thlr. dritter Theil.

Will man sich aber die Rechnung mit Brüchen ersparen, so kann man sie auf einerlei Benennung bringen, und dann blos ihre Zähler als Verhältnißzahlen gebrauchen; denn Brüche von gleichem Nenner verhalten sich, wie ihre Zähler. Bringt man obige Brüche unter einerlei Nenner, so erhält man der Reihe nach $\frac{6}{12}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{8}{12}$. Die Nenner kann man nun ganz weglassen, und die Zähler als Verhältnißzahlen nehmen. Man erhält dann zu Verhältnißzahlen 6, 9, 8. Man verfährt nun, wie gelehrt worden:

6
9
8
23 Summe der Verhältnißzahlen.

1) 23 : 6 = 800 : x

$x = \frac{6.800}{23} = \frac{4800}{23} = 208\frac{16}{23}$ Thlr. erster Theil wie vorher.

Eben so findet man die beiden andern Theile, wie oben.

11. Können bei der Gesellschaftsrechnung nicht auch umgekehrte Verhältnisse vorkommen? Und wie verfährt man dann?

Allerdings können auch umgekehrte Verhältnisse vorkommen. Z. B.

Ein Preiß von 200 Thlr. soll unter 3 Arbeiter nach Verhältniß der Schnelligkeit, mit wel-

eher sie ihre Arbeit zu Stande brachten, vertheilt werden. Der erste ist mit seiner Arbeit in 30 Stunden, der zweite in 24 St., und der dritte in 20 St. fertig geworden. Wie viel wird ein jeder von dem Preiße erhalten?

In diesem Exempel muß der Preiß 200 Thlr. in 3 Theile getheilt werden, die sich zu einander verhalten, nicht wie die Zeiten, in welchen sie die Arbeit zu Stande brachten, sondern umgekehrt wie diese Zeiten. Denn je längere Zeit einer mit seiner Arbeit zugebracht hat, desto weniger kann er von dem Preiße erhalten. Man kann hier deshalb nicht die gegebenen Zeiten als die Verhältnißzahlen nehmen, wie bei den frühern Exempeln z. B. die Einlagen; sondern man muß die wahren Verhältnißzahlen erst aus den Zeiten bestimmen, indem man nämlich berechnet, wie viel jeder in 1 Stunde von der Arbeit gemacht hat. Da der erste seine Arbeit in 30 Stunden fertig gebracht hat, so hat er jede Stunde den 30sten Theil oder $\frac{1}{30}$ der Arbeit gemacht; der zweite hat 24 Stunden mit der Arbeit zugebracht, folglich hat er in jeder Stunde den 24sten Theil derselben oder $\frac{1}{24}$ gemacht; der dritte endlich hat seine Arbeit in 20 Stunden verfertigt; also hat er in jeder Stunde den 20sten Theil oder $\frac{1}{20}$ der Arbeit zu Stande gebracht. Die wahren Verhältnißzahlen sind also die Brüche: $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{24}$, $\frac{1}{20}$. Verfährt man mit ihnen, wie in 10. gelehrt worden, so erhält man zu Verhältnißzahlen: 4, 5, 6. Nun kann man nach

dem Vorigen berechnen, wie viel ein jeder erhalten muß von dem Preiße. Nämlich:

4
5
6
---
15. Summe der Verhältnißzahlen.

1) 15 : 4 = 200 Thlr. : x.

$x = \frac{200.4}{15} = \frac{800}{15} = 53\frac{1}{3}$ Thlr. erhält der erste.

2) 15 : 5 = 200 Thlr. : x

$x = \frac{5.200}{15} = \frac{200}{3} = 66\frac{2}{3}$ Thlr. erhält der zweite.

3) 15 : 6 = 200 Thlr. : x

$x = \frac{6.200}{15} = \frac{2.200}{5} = \frac{400}{5}$

= 80 Thlr. erhält der dritte.

12. Hat man nicht noch ein anderes Verfahren, Aufgaben, die in die einfache Gesellschaftsrechnung gehören, aufzulösen, als das bisher beschriebene?

Allerdings giebt es noch ein anderes Verfahren, welches nicht so weitläuftig als das angegebene, und diesem daher vorzuziehen ist.

13. Worin besteht dieses kürzere Verfahren?

Die allgemeine Regel bei diesem Verfahren heißt: Man addire die Verhältnißzahlen. Mit dieser Summe dividire man in die zu theilende Größe; und den Quotienten multiplicire man der Reihe nach mit den einzelnen Verhältnißzahlen.

14. Wie läßt sich diese allgemeine Regel durch ein Beispiel deutlich machen?

Es sey folgende Aufgabe gegeben:

Drei reiche Personen kaufen zusammen eine

Mühle für 2200 Thlr. Nach einiger Zeit verkaufen sie dieselbe wieder, und gewinnen daran 440 Thlr. Wie viel muß jede einzelne Person von diesem Gewinne erhalten, da die erste 850 Thlr., die zweite 640 Thlr., die dritte 710 Thlr. zum Ankauf dieser Mühle gegeben haben?

Die Verhältnißzahlen sind: 850, 640, 710, und ihre Summe ist 2200. Mit dieser Summe wird in den Gewinn, also in 440 Thlr. dividirt, giebt zum Quotienten den Bruch $\frac{440}{2200}$ oder aufgehoben $\frac{1}{5}$. Dieser Quotient wird zuerst mit der ersten Verhältnißzahl, 850 multiplicirt; dann mit der zweiten, 640, und endlich mit der dritten 710. Nämlich:

1) $\frac{1}{5} \cdot 850 = \frac{1 \cdot 850}{5} = \frac{850}{5} =$ 170 Thlr. Antheil des ersten am Gewinn.

2) $\frac{1}{5} \cdot 640 = \frac{1 \cdot 640}{5} = \frac{640}{5} =$ 128 Thlr. Antheil des zweiten.

3) $\frac{1}{5} \cdot 710 = \frac{1 \cdot 710}{5} = \frac{710}{5} =$ 142 Thlr. Antheil des dritten.

Daß diese Art der Berechnung weit vorzüglicher ist, als die erste, leuchtet ein. Man braucht nicht 3 verschiedene Regeldetri-Exempel anzusetzen; sondern kommt mit einer leichten Division und Multiplication weg. Es mag noch ein Beispiel hier stehen:

Vier Personen setzen zusammen in die Lotterie; die eine giebt 3 Thlr., die andere 4 Thlr., die dritte 5 Thlr., und die vierte 6 Thlr. Sie ge-

winnen 4500 Gulden: wie viel wird jede von diesem Gewinne erhalten?

3
4
5
6
18 Summe der Verhältnißzahlen.

18|4500|250 Quotient
36 3 erste Verhältnißzahl
„90 750 Antheil des ersten am
90 Gewinne.
„„0
250 Quotient
4 zweite Verhältnißzahl
1000 Antheil des zweiten.
250 Q.
5 dritte Verhältnißzahl
1250 Antheil des dritten.
250 Q.
6 vierte Verhältnißzahl
1500 Antheil des vierten.

Die erste erhält also vom Gewinne 750 Fl.; die zweite 1000 Fl., die dritte 1250 Fl., und die vierte 1500 Fl.

15. Was für ein Verfahren muß man anwenden bei Aufgaben aus der zusammengesetzten Gesellschaftsrechnung?

Wenn man Aufgaben berechnen soll, die in die zusammengesetzte Gesellschaftsrechnung gehören, d. h. solche, wo außer den eigentlichen Verhältnissen, nach denen das Ganze getheilt werden soll,

noch Nebenbestimmungen oder Nebenverhältnisse gegeben sind; so darf man diese Nebenverhältnisse offenbar nicht aus der Acht lassen, sondern sie wohl berücksichtigen. Wenn z. B. die Aufgabe gegeben ist:

Zwei haben in einer Handlung, der erste 90 Thlr. 3 Monate lang, und der zweite 120 Thlr. 2 Monate lang. Sie gewinnen damit 125 Thlr.: wie viel wird ein jeder davon erhalten müssen?

So sind außer den Beiträgen jedes einzelnen noch die Zeiten gegeben, in welchen sie ihre Einlage in der Handlung stehen ließen; und bei der Theilung des Gewinnes darf man nicht blos die Einlagen berücksichtigen, sondern auch diese Zeiten.

Um nun dergleichen Aufgaben gehörig zu lösen, verfahre man auf folgende Art:

Man multiplicire die gegebenen Verhältnißzahlen mit den Nebenverhältnissen die der Reihe nach zu ihnen gehören, so erhält man die wahren Verhältnißzahlen, die man nun addirt; und dann verfährt man ganz wie bei der einfachen Gesellschaftsrechnung. Z. B. in dem zuletzt angeführten Exempel sind die Beiträge der beiden Personen, die gemeinschaftlich handeln, die Verhältnißzahlen, nämlich 90 und 120; da aber noch Nebenverhältnisse da sind, die Zeiten, so sind jene Verhältnißzahlen nicht die wahren Verhältnißzahlen, nach denen der Gewinn getheilt werden muß; sondern diese erhält man erst, wenn man die einzelnen Beiträge mit den ihnen zugehörigen Zeiten multiplicirt; also den Beitrag des ersten 90 Thlr. mit

der Zeit, welche er seinen Beitrag stehen läßt, also mit 3, giebt 270.; und den Beitrag des zweiten 120 Thlr. mit der Zeit, welche er denselben stehen läßt, also mit 2, giebt 240. Dieses sind nun die wahren Verhältnißzahlen, die man aber noch in kleinern Zahlen ausdrücken kann, wenn man sie nach Fr. 9. mit einerlei Zahl, hier mit 30, dividirt; man erhält dann für die erste 9, und für die zweite 8. Nun verfährt man ganz wie bei der ernfachen Gesellschaftsrechnung; nämlich:

9
8
17 Summe der Verhältnißzahlen.

Mit dieser Summe in den Gewinn von 125 Thlr. dividirt, giebt zum Quotienten $7\frac{6}{17}$ Thlr. Multiplicirt man diesen Quotienten mit den Verhältnißzahlen 9 und 8, so erhält man den Antheil eines jeden am Gewinn. Nämlich:

1) $7\frac{6}{17} \cdot 9 = \frac{125}{17} \cdot 9 = \frac{125.9}{17} = \frac{1125}{17}$
$= 66\frac{3}{17}$ Thlr. Antheil des ersten.

2) $7\frac{6}{17} \cdot 8 = \frac{125}{17}\ 8 = \frac{125.8}{17} = \frac{1000}{17}$
$= 58\frac{14}{17}$ Thlr. Antheil des zweiten.

Zur mehrern Deutlichkeit mag noch ein Beispiel aus der zusammengesetzten Gesellschafsrechnung hier stehen:

Zu einem Straßenbau hat ein Fuhrmann 28 Fuhren mit 1 Pferde; ein anderer 35 Fuhren mit 2 Pferden; ein dritter 42 Fuhren mit 3 Pferden gethan. Sie bekommen dafür zusammen 50 Thlr. wie viel wird jeder davon erhalten?

Der Antheil eines jeden an dem Fuhrlohn hängt hier nicht blos von der Anzahl der Fuhren ab, sondern auch von der Menge der Pferde. Man muß daher beides zusammen multipliciren, um die wahren Verhältnißzahlen, nach denen die 50 Thlr. getheilt werden müssen, zu erhalten. Nämlich:

1) 28 . 1 = 28 erste Verhältnißzahl
2) 35 . 2 = 70 zweite "
3) 42 . 3 = 126 dritte "

Dividirt man diese Verhältnißzahlen mit 14, so erhält man: 2, 5, 9. Und nun:

2
5
9
16 Summe der Verhältnißzahlen.

16 | 50 Thlr. | $3\frac{2}{16}$ oder $3\frac{1}{8}$ Quotient.

48
2
16

1) $3\frac{1}{8} \cdot 2 = \frac{25}{8} \cdot 2 = \frac{25.2}{8} = \frac{50}{8} =$
$6\frac{1}{4}$ Thlr. Antheil des ersten am Fuhrlohn.

2) $3\frac{1}{8} \cdot 5 = \frac{25}{8} \cdot 5 = \frac{25.5}{8} = \frac{125}{8}$
$= 15\frac{5}{8}$ Thlr. Antheil des zweiten.

3) $3\frac{1}{8} \cdot 9 = \frac{25}{8} \cdot 9 = \frac{25.9}{8} = \frac{225}{8}$
$= 28\frac{1}{8}$ Thlr. Antheil des dritten.

16. Was für eine Probe hat man bei der Gesellschaftsrechnung?

Um bei Aufgaben aus der Gesellschaftsrechnung zu sehen, ob man richtig gerechnet habe, hat man weiter nichts zu thun, als die gefunde-

nen einzelnen Theile des getheilten Ganzen zusammen zu addiren, wo alsdann das Ganze wieder erscheinen muß. Z. B. in dem letzten Exempel war die ganze Summe des Fuhrlohns, welches die 3 Fuhrleute unter sich theilen sollten, 50 Thlr. Wir fanden, daß der erste $6\frac{1}{4}$, der zweite $15\frac{5}{8}$ Thlr., und der dritte $28\frac{1}{8}$ Thlr. erhielt. Addirt man diese einzelnen Antheile, so muß, wenn richtig gerechnet worden ist, das ganze Fuhrlohn, also 50 Thlr, zum Vorschein kommen; welches auch hier der Fall ist; denn

$6\frac{1}{4}$ $\frac{2}{8}$
$15\frac{5}{8}$
$28\frac{1}{8}$
50 Thlr.

17. Ist die Gesellschaftsrechnung nützlich und nothwendig?

Die Gesellschaftsrechnung ist eine ganz besonders nützliche, und fast allen Ständen unentbehrliche Rechnung. Denn man gebraucht dieselbe bei Erbschaftsvertheilungen, Koncursen, Kompagnichandlungen, bei Versicherungsanstalten aller Art, bei Vertheilung der Steuern, bei Brandschatzungen u. s. w.

Mit der Gesellschaftsrechnung darf man übrigens die Durchschnittsrechnung nicht verwechseln.

18. Was lehrt die Durchschnittsrechnung?

Sie lehrt den mittleren Werth einer Größe finden. Z. B. wenn ein Gut in 6 Jahren nach einander folgende Einkünfte hat: 451 Thlr., 622

Thlr., 487 Thlr., 536 Thlr., 395 Thlr., 474 Thlr. und man will wissen, wie viel im Durchschnit. in jedem Jahre eingekommen ist; so lehrt die Durchschnittsrechnung dies finden.

19. Wie kann man nun den mittlern Werth einer Größe, z. B. den mittlern Ertrag eines Gutes, bestimmen?

Dies geschieht, indem man die verschiedenen Werthe von ihr, z. B. die verschiedenen jährlichen Ertrage des Guts, zusammenaddirt, und diese Summe durch die Anzahl der Werthe, z. B. durch die Anzahl der Jahre, dividirt. Der Quotient giebt den gesuchten mittlern Werth, z. B. den gesuchten mittlern Ertrag des Gutes. Wenn wir das vorige Beispiel behalten, so werden die einzelnen Einkünfte des Gutes in den 6 Jahren addirt, und diese Summe wird durch die Anzahl der Jahre, also durch 6 dividirt. Der Quotient giebt an, wie viel im Durchschnitt in einem Jahre eingekommen ist. Nämlich:

451 Thlr.
622 =
487 =
536 =
395 =
474 =

6 | 2965 Thlr. | 494 1/6 Thlr. ist im Durchschnitt in einem Jahre eingekommen.
24

„56
54

25
24

1

6

Ein und dreißigstes Kapitel.

Vermischungs- und Alligationsrechnung.

1. Was versteht man unter der Vermischungsrechnung?

Die Vermischungsrechnung lehrt finden, wie viel von jeder einfachen Materie zu einer gegebenen oder verlangten Menge der vermischten kömmt, wenn die Verhältnisse der einfachen gegeben sind. Z. B. folgende Aufgabe gehört in die Vermischungsrechnung:

Wie viel Salpeter, Schwefel und Kohlen braucht man zu 100 Pfd. Schießpulver, wenn zu einem Pfund oder zu 32 Loth, nöthig sind 24 Loth Salpeter, 6 Loth Kohlen und 2 Loth Schwefel?

2. Ist die Vermischungsrechnung von der Gesellschaftsrechnung verschieden?

Nein, sie ist von dieser nicht verschieden, sondern ganz einerlei, und es findet bei beiden ganz einerlei Verfahren Statt. Z. B. die vorige Aufgabe. Man betrachtet hier die Menge der zu einem Pfunde Schießpulver nöthigen Materien, also 24, 6, 2 als die Verhältnißzahlen, und die Menge des zu verfertigenden Schießpulvers, also 100 Pfd. als die zu theilende Größe, und verfährt nun ganz wie bei der Gesellschaftsrechnung. Nämlich:

24
6
2

32 Summe der Verhältnißzahlen.

32 | 100 Pfd. | $3\frac{4}{32}$ Pfd. oder $3\frac{1}{8}$ Pfd. Quotient.

96

„4

32

1) $3\frac{1}{8} \cdot 24 = \frac{25}{8} \cdot 24 = \frac{25 \cdot 24}{8} = 25 \cdot 3$
= 75 Pfd. Salpeter.

2) $3\frac{1}{8} \cdot 6 = \frac{25}{8} \cdot 6 = \frac{25 \cdot 6}{8} = \frac{25 \cdot 3}{4}$
$= \frac{75}{4} = 18\frac{3}{4}$ Pfd. Kohlen.

3) $3\frac{1}{8} \cdot 2 = \frac{25}{8} \cdot 2 = \frac{25 \cdot 2}{8} = \frac{25}{4}$
$= 6\frac{1}{4}$ Pfd. Schwefel.

Probe.

75 Pfd.
$18\frac{3}{4}$ =
$6\frac{1}{4}$ =

100 Pfd.

3. Was ist die Alligationsrechnung?

Die Alligationsrechnung ist mit der Vermischungsrechnung verwandt. Sie unterscheidet sich nur darin von derselben, daß bei ihr das Verhältniß der Theile nicht unmittelbar gegeben ist, sondern erst gesucht werden muß. Die Alligationsrechnung hat nämlich zur Absicht, aus den gegebenen Werthen zweier Sorten, aus denen man eine neue Sorte machen will, die einen mittlern Werth haben soll, das Verhältniß der zu vermischenden Sorten zu finden.

4. Wie läßt sich dies durch ein Beispiel deutlich machen?

Z. B. ein Weinhändler hat zweierlei Sorten Wein; von der bessern kostet das Maaß 20 Gr., von der schlechtern aber 12 Gr. Er will diese beiden Weine so vermischen, daß eine mittlere

Sorte entsteht, die 1 Eimer, oder 63 Maaß enthalten soll, und von welcher das Maaß 15 Gr. kostet. Wie viel wird er zu dieser Mischung von jeder der beiden Sorten nehmen müssen? — Diese Aufgabe gehört in die Alligationsrechnung. Das Verhältniß der zu vermischenden Weine muß aus dem Preiße derselben und der Mischung erst gesucht werden.

5. Wie kann man dieses Verhältniß der zu mischenden Sorten finden?

Die allgemeine Regel heißt:

Man subtrahire den Preiß der schlechtern Sorte von dem Preiße der Mischung; so erhält man die Verhältnißzahl der bessern Gattung. Nun subtrahire man den Preiß der Mischung von dem Preiße der bessern Sorte, so erhält man die Verhältnißzahl der schlechtern Sorte. Nun verfährt man bei der Vermischungs = und Gesellschaftsrechnung.

6. Wie läßt sich die allgemeine Regel an einem Beispiele zeigen?

Nehmen wir die vorige Aufgabe in 5; so ist der Preiß der schlechtern Sorte Wein 12 Gr.; der Preiß der Mischung aber soll seyn 15 Gr. Subtrahirt man jene Zahl von dieser, so erhält man 3 Gr. 3 ist also die Verhältnißzahl der bessern Sorte Wein; der Preiß der bessern Sorte war 20 Gr., subtrahirt man hiervon den Preiß der Mischung, nämlich 15 Gr., so erhält man 5 G. 5 ist also die Verhältnißzahl der schlechtern Sorte. Nun verfährt man ganz wie bei der Vermischungsregel. Nämlich:

3 Verhältnißzahl der bessern Sorte
5 = = schlechtern =
8 Summe der Verhältnißzahlen.

Die Menge der Mischung war 63 Maaß; also

8 | 63 M. | $7\frac{7}{8}$ M. Quotient.

56
„7
8

1) $7\frac{7}{8} \cdot 3 = \frac{63}{8} \cdot 3 = \frac{63 \cdot 3}{8} = \frac{189}{8}$
$= 23\frac{5}{8}$ Maaß; so viel muß von der bessern Weinsorte genommen werden.

2) $7\frac{7}{8} \cdot 5 = \frac{63}{8} \cdot 5 = \frac{63 \cdot 5}{8} = \frac{315}{8}$
$= 39\frac{3}{8}$ Maaß; so viel muß von der schlechtern Sorte genommen werden.

Noch ein Beispiel mag hier stehen.

Ein Kaufmann will zweierlei Taback, den einen das Pfd. zu 16 Gr., den andern das Pfd. zu 9 Gr. mischen, so daß die Mischung 100 Pfd. beträgt, und das Pfd. dieser Mischung 12 Gr. kostet: wie viel muß er von jeder Sorte zu der Mischung nehmen?

12 Gr. Preiß der Mischung
9 Gr. Preiß der schlechtern Sorte
3 Verhältnißzahl der bessern Sorte.

16 Gr. Preiß der bessern Sorte
12 Gr. Preiß der Mischung
4 Verhältnißzahl der schlechtern Sorte.

3
4
7 Summe der Verhältnißzahlen.

Die Menge der Mischung war 100 Pfd.; also

7 | 100 Pfd. | $14\frac{2}{7}$ Pfd. Quotient.

7
30
28
„2
7

1) $14\frac{2}{7} \cdot 3 = \frac{100}{7} \cdot 3 = \frac{100 \cdot 3}{7} = \frac{300}{7}$ $= 42\frac{6}{7}$ Pfd.; so viel muß er von der bessern Sorte nehmen.

2) $14\frac{2}{7} \cdot 4 = \frac{100}{7} \cdot 4 = \frac{100 \cdot 4}{7} = \frac{400}{7}$ $= 57\frac{1}{7}$ Pfd.; so viel muß er von der schlechtern Sorte nehmen.

7. Was ist von der Anzahl der zu mischenden Sorten, und von dem Preiße der Mischung zu merken?

Der zu mischenden Sorten dürfen nicht mehr als 2 seyn. Der Grund hiervon ist, weil die Aufgabe unbestimmt seyn, d. h. unzählige Auflösungen zulassen würde, wenn 3 oder mehrere Sorten vermischt werden sollten. Von dem Preiße der Mischung aber ist zu merken, daß er immer zwischen die Preiße der zu mischenden Sorten fallen muß, was sich eigentlich schon von selbst versteht.

8. Wie kann man bei Exempeln aus der Alligationsrechnung die Probe machen?

Eine gute Probe auf Exempel aus dieser Rechnung ist es, wenn man die Preiße der zu mischenden Sorten bestimmt, und addirt; hernach

aber auch die neue Mischung nach ihrem Werthe berechnet; es müssen dann, wenn man richtig gerechnet hat, gleiche Preiße heraus kommen.

Nehmen wir das erste Exempel in 7; so hatten wir gefunden, daß zu 63 Maaß der mittlern Weinsorte von der bessern Sorte $23\frac{5}{8}$ Maaß; von der schlechtern aber $39\frac{3}{8}$ Maaß genommen werden müsse. Berechnet man nun den Preiß von $23\frac{5}{8}$ Maaß der bessern, und von $39\frac{3}{8}$ Maaß der schlechtern Weinsorte, und addirt diese Preiße, so muß man eben so viel erhalten, als der Preiß von 63 Maaß der Mischung. — Da 1 Maaß der bessern 20 Gr., der schlechtern 12 Gr., und der Mischung 15 Gr. kostet, so erhält man nun:

1) 1 Maaß : $23\frac{5}{8}$ M. = 20 Gr. : x

1 M. : $\frac{189}{8}$ M. = 20 Gr. : x

8 M. : 189 M. = 20 Gr. : x

$x = \frac{189.20}{8}$ Gr. = $\frac{180.5}{2}$ = $\frac{945}{2}$

= $472\frac{1}{2}$ Gr.; so viel kosten $23\frac{5}{8}$ Maaß der bessern Weinsorte.

2) 1 M. : $39\frac{3}{8}$ M. = 12 Gr. : x

1 M. : $\frac{315}{8}$ M. = 12 Gr : x

8 M. : 315 M. = 12 Gr. : x

$x = \frac{315.12}{8}$ Gr. = $\frac{315.3}{2}$ = $\frac{945}{2}$ Gr.

= $472\frac{1}{2}$ Gr.; so viel kosten $39\frac{3}{8}$ Maaß der schlechtern Weinsorte.

Addirt man diese beiden gefundenen Preiße; so erhält man 945 Gr.

3) 1 M. : 63 M. = 15 Gr. : x

$x = \frac{63.15}{1}$ Gr. = 63 . 15 Gr. = 945 Gr.;

so viel kosten also 63 Maaß der Mischung. Da nun die Preiße der vermischten Sorten, und der Preiß der Mischung gleich sind, so war richtig gerechnet.

Die Probe für das zweite Exempel in 7 würde nun so stehen:

Wir fanden, daß zu 100 Pfd. der mittlern Sorte von der bessern $42\frac{6}{7}$ Pfd., und von der schlechtern $57\frac{1}{7}$ Pfd. genommen werden mußte. Da nun 1 Pfd. der bessern Sorte 16 Gr., der schlechtern 9 Gr., der mittlern 12 Gr. kostet, so erhält man:

1) 1 Pfd. : $42\frac{6}{7}$ Pfd. = 16 Gr. : x

1 Pfd. : $\frac{300}{7}$ Pfd. = 16 Gr. : x

7 Pfd. : 300 Pfd. = 16 Gr. : x

$x = \frac{300.16}{7}$ Gr. = $\frac{4800}{7}$ = $685\frac{5}{7}$ Gr.; so viel kosten $42\frac{6}{7}$ Pfd. der bessern Sorte.

2) 1 Pfd. : $57\frac{1}{7}$ Pfd. = 9 Gr. : x

1 Pfd. : $\frac{400}{7}$ Pfd. = 9 Gr. : x

7 Pfd. : 400 Pfd. = 9 Gr. : x

$x = \frac{400.9}{7}$ Gr. = $\frac{3600}{7}$ = $514\frac{2}{7}$ Gr.; so viel kosten $57\frac{1}{7}$ Pfd. der schlechtern Sorte.

Diese beiden gefundenen Preiße addirt, giebt 1200 Gr.

3) 1 Pfd. : 100 = 12 Gr. : x

$x = \frac{100.12}{1}$ Gr. = 100 . 12 Gr. = 1200 Gr.; so viel kosten 100 Pfd. der Mischung.

Da nun die Preiße der vermischten Sorten, und der Preiß der Mischung gleich sind, so war richtig gerechnet.

Zwei und dreißigstes Kapitel.

Zins- oder Intereſſenrechnung.

1. Was verſteht man unter der Zins- oder Intereſſenrechnung?

Man verſteht darunter die Anwendung der Regeldetri auf die Berechnung der Zinſen, die von einem beſtimmten Kapitale gegeben werden müſſen.

2. Was ſind Zinſen?

Zinſen, oder Intereſſen heißen die Gelder, welche für die Benutzung eines fremden Kapitals in einer beſtimmten Zeit, nach einem beſtimmten Geſetze bezahlt werden. Dieſes beſtimmte Geſetz heißt der Zinsfuß. Der Zinsfuß wird nach Prozenten beſtimmt, d. h. es wird angegeben, wie viel Zinſen von jedem 100 des Kapitals in einem Jahre entrichtet werden ſollen.

3. Wie läßt ſich dies durch ein Beiſpiel erklären?

Wenn ich z. B. eine Summe Geldes, vielleicht 200 Thlr. nöthig habe, ſo borge ich ſie von einem Andern, der ſo viel Geld entbehren kann. Dafür aber, daß er mir die 200 Thlr. zu benutzen giebt, muß ich ihm, ſo lange ich ſie ihm nicht wieder bezahlen kann, jährlich eine gewiſſe Summe Geldes geben. Dieſe Gelder ſind die Zinſen oder Intereſſen. Das beſtimmte Geſetz aber, nach welchem ich dieſe Intereſſen gebe, heißt der Zinsfuß. Wenn z. B. beſtimmt iſt, daß ich ihm von jedem Hundert jährlich 5 Thlr. abgeben ſoll, oder

wie man gewöhnlich sagt, 5 Prozent, so ist dieses der Zinsfuß.

4. Wie wird die Zinsrechnung eingetheilt?

Sie wird eingetheilt in die einfache und zusammengesetzte. Einfach heißt die Zinsrechnung, wenn nur ein einziges Verhältniß als bekannt gegeben ist. Z. B. wenn gefragt wird: wie viel Interessen bringen 600 Thlr., wenn 100 Thlr. 6 Thlr. Interesse geben? so gehört diese Aufgabe in die einfache Zinsrechnung. In der zusammengesetzten Zinsrechnung sind aber mehr als 1 Verhältniß als bekannt gegeben. Z. B. wenn gefragt wird: wie viel Thaler Zinsen geben 1500 Thlr. in 3 Jahren, wenn 100 Thlr. in 1 Jahre 4 Prozent geben. — Die einfache und zusammengesetzte Zinsrechnung unterscheiden sich also ganz, wie die einfache und zusammengesetzte Regeldetri.

5. Was gelten für Regeln bei der Auflösung solcher Aufgaben, die in die Zinsrechnung gehören?

Es gelten ganz dieselben Regeln wie bei der einfachen und zusammengesetzten Regeldetri, und es ist keine neue Vorschrift nöthig. Doch merke man sorgfältig Folgendes:

1) Kapital und Prozente sind in umgekehrtem Verhältniß zu einander, wenn die Zinsen gleich sind.
2) Kapital und Zeiten stehen ebenfalls in umgekehrtem Verhältniß.
3) Kapital und Zinsen aber in geradem;
4) Prozente und Zeiten in umgekehrtem;
5) Prozente und Zinsen in geradem; und

6) Zeiten und Zinsen in geradem Verhältniß.

Es mögen nun einige Beispiele folgen, bei denen man sich der für die einfache und zusammengesetzte Regeldetri gegebenen Regeln erinnern muß.

Erstes Beispiel.

Von 100 Thlr. Kapital müssen jährlich 5 Thlr. Interessen abgegeben werden: wie viel von 1500 Thlr.?

100 Thlr. K. : 1500 Thlr. K. = 5 Thlr. : x
1 Thlr. K. : 15 Thlr. K. = 5 Thlr. : x
x = 15 . 5 = 75 Thlr.

Zweites Beispiel.

Wie viel muß man von 638 Thlr. Interessen geben, wenn der Zinsfuß $4\frac{1}{2}$ Prozent ist? (d. h. wenn von 100 Thlr. jährlich $4\frac{1}{2}$ Thlr. Zinsen gegeben werden)?

100 Thlr. : 638 Thlr. = $4\frac{1}{2}$ Thlr. : x
100 Thlr. : 638 Thlr. = $\frac{9}{2}$ Thlr. : x
200 Thlr. : 638 Thlr. = 9 Thlr. : x
$x = \frac{638 \cdot 9}{200}$ Thlr. = $\frac{5742}{200}$ Thlr. = $28\frac{71}{100}$ Thlr.

Drittes Beispiel.

638 Thlr. geben $28\frac{71}{100}$ Thlr. Interesse; man verlangt den Zinsfuß zu wissen (d. h. man verlangt zu wissen, wie viel Thaler von 100 Thlr. oder wie viel Prozent Interessen gegeben werden)?

638 Thlr. K. : 100 Thlr. K. = $28\frac{71}{100}$ Thlr. : x
638 Thlr. K. : 100 Thlr. K. = $\frac{2871}{100}$ Thlr. : x
63800 Thlr. K. : 100 Thlr. K. = 2871 Thlr. : x
$x = \frac{100 \cdot 2871}{63800}$ Thlr. = $\frac{2871}{638}$ Thlr. = $4\frac{1}{2}$ Thlr.

$4\frac{1}{2}$ Prozent ist also der Zinsfuß, oder von

100 Thlr. werden 4½ Thlr. Interessen gegeben. Dieses Beispiel war das vorige umgekehrt; beide dienen einander zur Probe.

Viertes Beispiel.

100 Thlr. Kapital geben in 1 Jahre 5 Thlr. Zinsen: wie viel werden 775 Thlr. Kapital in 5 Jahren Zinsen geben?

$$\left.\begin{array}{lll} 100 \text{ Thlr. K.} & : & 775 \text{ Thlr. K.} \\ 1 \text{ J.} & : & 5 \text{ J.} \end{array}\right\} = 5 \text{ Thlr.} : x$$

$$1 \cdot 100 : 775 \cdot 5 = 5 \text{ Thlr.} : x$$

$$x = \frac{775 \cdot 5 \cdot 5}{100} \text{ Thlr.} = \frac{775}{4} \text{ Thlr.} = 193\tfrac{3}{4} \text{ Thlr.}$$

Fünftes Beispiel.

100 Thlr. Kap. geben in 1 Jahre zu 6 Prozent 6 Thlr. Interessen: wie viel Thaler Interessen geben 1200 Thlr. zu 4 Prozent in 7 Jahren?

$$\left.\begin{array}{lll} 100 \text{ Thlr. K.} & : & 1200 \text{ Thlr. K.} \\ 6 \text{ Proz.} & : & 4 \text{ Proz.} \\ 1 \text{ J.} & : & 7 \text{ J.} \end{array}\right\} = 6 \text{ Thlr.} : x$$

$$100 \cdot 6 \cdot 1 : 1200 \cdot 4 \cdot 7 = 6 \text{ Thlr.} : x$$

$$x = \frac{1200 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 6}{100 \cdot 6 \cdot 1} \text{ Thlr.} = 72 \cdot 4 \cdot 7 \text{ Thlr.} = 336 \text{ Thlr.}$$

Sechstes Beispiel.

Es hat Jemand so viel Kapital außen stehen, daß er in 3 Jahren an Zinsen 954 Thlr. erhält: wie groß wird das Kapital seyn, wenn der Zinsfuß 5 Prozent ist, d. h. wenn von 100 Thlr. jährlich 5 Thlr. Interessen gegeben werden?

5 Thlr. Zins. : 954 Thlr. Zins. } = 100 Thlr. K. : x
3 J. : 1 J.

5 . 3 : 954 . 1 = 100 Thlr. K. : x

$x = \frac{954.1:100}{5.3}$ Thlr. $= \frac{954.x.20}{3}$ Thlr. $= \frac{19080}{3}$ Thlr.

= 6360 Thlr.

Siebentes Beispiel.

Von einem Kapital von 1800 Thlr. hat jemand bei einem Zinsfuß von 4 Prozent 1500 Thlr. Interesse gezogen: wie viele Jahre hat das Kapital gestanden, wenn 100 Thlr. Kapital zu 5 Prozent in 1 Jahre 5 Thlr. Zinsen geben?

1800 Thlr. K. : 100 Thlr. K.
4 Prozent : 5 Proz. } = 1 J. : x
5 Thlr. Z. : 1500 Thlr. Z.

1800 . 4 . 5 : 100 . 5 . 1500 = 1 J. : x

$x = \frac{100.J.1500.1}{1800.4.J}$ Jahr $= \frac{375}{18}$ J.

$= 20\frac{5}{6}$ Jahr.

Achtes Beispiel.

775 Thlr. Kap. geben in 5 Jahren 155 Thlr. Zinsen: man will wissen, wie viel Prozente gegeben werden, da 100 Thlr. Kap. in 1 Jahre zu 5 Prozent 5 Thlr. Interessen geben?

775 Thlr. K. : 100 Thlr. K.
5 J. : 1 J. } = 5 Proz. : x
5 Thlr. Z. : 155 Thlr. Z.

775 . 5 . 5 : 100 . 1 . 155 = 5 Proz. : x

$x = \frac{100.1.155.5}{775.5.6}$ Proz. = 4 Prozent.

6. Was versteht man unter dem künftigen Werthe eines Kapitals?

Man versteht darunter die Summe, welche einem Kapitale nebst seinen künftigen Zinsen zusammengenommen gleich ist.

Z. B. bei 5 Proz. bringen mir 1000 Thlr. nach 4 Jahren 200 Thlr. Interesse. Am Schlusse der 4 Jahre habe ich also 1200 Thlr., dieses heißt der Werth des Kapitals von 1000 Thlr. nach 4 Jahren.

7. Wie kann man den künftigen Werth eines Kapitals finden?

Den künftigen Werth eines Kapitals kann man auf zweierlei Weise finden.

1) Man berechne die Zinsen nach Verlauf der gegebenen Jahre und addire sie zu dem Kapitale.

Z. B. wie viel beträgt der Werth eines Kapitals von 4500 Thlr. nach $3\frac{1}{2}$ Jahren, wenn der Zinsfuß $4\frac{1}{2}$ Prozent ist? Zuerst berechne man, wie viel dieses Kapital von 4500 Thlr. nach $3\frac{1}{2}$ Jahren Interessen bringt bei einem Zinsfuße von $4\frac{1}{2}$ Prozent. Nämlich:

$$\left.\begin{array}{l} 100 \text{ Thlr. K.} : 4500 \text{ Thlr. K.} \\ 1 \text{ J.} : 3\frac{1}{2} \text{ J.} \end{array}\right\} = 5 \text{ Thlr. Zins.} : x$$

$$100 \cdot 1 : 4500 \cdot 3\tfrac{1}{2} = 5 \text{ Thlr. Zins.} : x$$

$$100 : 4500 \cdot \tfrac{7}{2} = 5 \text{ Thlr. Zins.} : x$$

$$100 : \frac{31500}{2} = 5 \text{ Thlr. Zins.} : x$$

$$100 : 15750 = 5 \text{ Thlr. Zins.} : x$$

$$x = \frac{15750 \cdot 5}{100} \text{ Thlr.} = \frac{1575}{2} \text{ Thlr.}$$

$$= 787\tfrac{1}{2} \text{ Thlr. Zinsen.}$$

Jenes Kapital bringt also in $3\frac{1}{2}$ Jahren $787\frac{1}{2}$ Thlr. Zinsen; addirt man diese Zinsen zu dem Kapitale 4500 Thlr., so erhält man $5287\frac{1}{2}$ Thlr. Dieses ist der künftige Werth des Kapitals von 4500 Thlr. nach $3\frac{1}{2}$ Jahren bei $4\frac{1}{2}$ Prozent Interesse.

2) Man kann den künftigen Werth eines Kapitals aber auch auf folgende Art finden:

Man setzt nämlich: 100 Thlr. Kapital verhält sich zu seinem künftigen Werthe, wie das gegebene Kapital zu seinem künftigen Werthe, der künftige Werth von 100 Thlr. läßt sich jedesmal leicht und schnell berechnen. Z. B.

Wie groß ist der Werth eines jetzt anzulegenden Kapitals von 1550 Thlr. zu 5 Prozent nach 10 Jahren? Da der Werth von 100 Thlr. bei 5 Prozent nach 10 Jahren 150 Thlr. ist (wie sich dies sehr leicht berechnen läßt); so setzt man nun:

100 Thlr. : 150 Thlr. = 1550 Thlr. : x

2 Thlr. : 150 Thlr. = 31 Thlr. : x

$x = \frac{150 \cdot 31}{2}$ Thlr. = 75.31 Thlr. = 2325 Thlr.

Es mag noch ein Beispiel auf beide Arten gerechnet hier stehen:

Welches ist der künftige Werth von einem Kapitale von 650 Thlr. bei $5\frac{1}{2}$ Prozent Interesse nach 40 Jahren?

1) 100 Thlr. K. : 650 Thlr. K.
   1 J. : 40 J. } = $5\frac{1}{2}$ Thlr. : x

100 . 1 : 650 . 40 = $\frac{1}{2}$ Thlr. : x

1 : 65 . 4 = $\frac{1}{2}$ Thlr. : x

$x = 65 . 4 . \frac{1}{2}$ Thlr. $= \frac{11.65.4}{2}$ Thlr. =
11 . 65 . 2 Thlr. = 1430 Thlr.
1430 Interessen des Kapitals nach 40 J.
650 Kapital

2080 Werth des Kapitals nach 40 J.

2) 100 Thlr. K. : 320 Thlr. = 650 Thlr. : x
$x = \frac{320.650}{100}$ Thlr. = 32 . 65 Thlr.
= 2080 Thlr. Werth des Kap. von 650 Thlr. nach 40 J., wie vorher.

8. Was versteht man unter dem jetzigen oder baaren Werthe einer nach einer gewissen Zeit zu zahlenden Summe?

Unter dem jetzigen oder baaren Werthe einer nach einer gewissen Zeit auszuzahlenden Summe, versteht man diejenige Summe, deren künftiger Werth nach dieser Zeit der auszuzahlenden Summe gleich ist. Eine solche Summe discontiren heißt, ihren baaren Werth finden, und der Unterschied beider Werthe der Disconto.

9. Wie läßt sich dies durch ein Beispiel deutlich machen?

Z. B. Ist nach 4 Jahren die Summe von 1200 Thlr. auszuzahlen, so ist ihr baarer Werth zu 5 Prozent 1000 Thlr., also der Disconto, oder der Unterschied beider Werthe, 200 Thlr. Habe ich nämlich von Jemandem nach 4 Jahren 1200 Thlr. zu fordern, und will diese Schuld sogleich, also 4 Jahre früher einziehen, so giebt er mir nicht 1200 Thlr., sondern er subtrahirt davon 200 Thlr. als den Disconto, und giebt mir nur 1000 Thlr.,

welche, zu 5 Prozent ausgeliehen, nach 4 Jahren 1200 Thlr. werth sind, als so viel ich alsdann zu fordern habe.

10. Wie kann man den baaren Werth einer nach 5 Jahren zahlbaren Summe von 3000 Thlr. zu 6 Prozent finden?

Da 100 Thlr. zu 6 Prozent nach 5 Jahren 130 Thlr. werth sind, so ist 100 Thlr. der baare Werth von einer nach 5 Jahren auszuzahlenden Summe von 130 Thlr. Man setze nun: wie sich 130 Thlr. zu ihrem baaren Werthe 100 Thlr. verhält, so verhält sich auch die Summe von 3000 Thlr. zu ihrem baaren Werthe; nämlich:

130 Thlr. : 100 Thlr. = 3000 Thlr. : x

$x = \frac{100.3000}{130}$ Thlr. $= \frac{300000}{130}$ Thlr.

$= 2307\frac{9}{13}$ Thlr. Dieses ist also der baare Werth von einer nach 5 Jahren zu zahlenden Summe von 3000 Thlr. zu 5 Prozent. Auf ähnliche Art werden ähnliche Aufgaben gelößt.

11. Wie kann man von einer Summe, die theilweise in verschiedenen Zeiten abgetragen werden soll, den baaren Werth finden?

Man findet ihn, wenn man die einzelnen Posten nach dem vorigen discontirt, oder ihren baaren Werth sucht, und die so gefundenen baaren Werthe derselben zusammenaddirt.

12. Wie läßt sich dies an einem Beispiele zeigen?

Z. B. Es bietet Jemand auf ein Haus 9000 Thlr. baar; ein anderer aber 10000 Thlr. so, daß

davon 2000 Thlr. nach 1 Jahre, 3000 Thlr. nach 2 Jahren, und 5000 Thlr. nach 3 Jahren abgetragen werden sollen. Will man nun beide Gebote mit einander vergleichen, so muß man die Summe des andern Gebots, nach dem gewöhnlichen Zinsfuße, z. B. 5 Prozent, discontiren, oder ihren baaren Werth suchen. Dies geschieht nun, wenn man von den einzelnen Posten, die abgetragen werden sollen, den baaren Werth sucht, und diese so gefundenen baaren Werthe addirt. Nämlich:

1) 105 Thlr. : 100 Thlr. = 2000 Thlr. : x
$x = \frac{2000.100}{105}$ Thlr. $= \frac{200000}{105}$ Thlr.
$= 1904\frac{80}{105}$ Thlr. Dieses ist der baare Werth der 2000 Thlr., die nach 1 Jahre abgetragen werden sollen.

2) 110 Thlr. : 100 Thlr. = 3000 Thlr. : x
$x = \frac{100.3000}{110}$ Thlr. $= \frac{10.3000}{11}$ Thlr. $= \frac{30000}{11}$
$= 2727\frac{3}{11}$ Thlr. Dieses ist der baare Werth der 3000 Thlr., die nach 2 Jahren abgetragen werden sollen.

3) 115 Thlr. : 100 Thlr. = 5000 Thlr. : x
$x = \frac{100.5000}{115}$ Thlr. $= \frac{500000}{115}$ Thlr. $= 4347\frac{19}{23}$ Thlr.
Dieses ist der baare Werth der 5000 Thlr., die nach 3 Jahren abgetragen werden sollen.

Addirt man diese einzelnen baaren Werthe, so erhält man den baaren Werth des andern Gebots von 10000 Thlr. Nämlich:

$1904\frac{80}{105}$	Thlr.	$\frac{20240}{26565}$
$2727\frac{3}{11}$	=	$\frac{7245}{26565}$
$4347\frac{19}{23}$	=	$\frac{21945}{26565}$

$8979\frac{153}{77}\frac{1}{1}$ Thlr. baarer Werth des zweiten Gebots. Das erste Gebot von 9000 Thlr. baar ist also mehr.

13. Was versteht man unter mittlerem Zahlungstermine?

Wenn eine Summe, die in mehrern Posten ohne Zinsen abzutragen ist, auf einmal ohne Disconto bezahlt werden soll: so heißt die Zeit, da diese Auszahlung ohne Schaden beider Parteyen geschehen muß, der mittlere Zahlungstermin.

14. Wie läßt sich dies durch ein Beispiel deutlich machen?

Wenn ich an Jemanden zu fordern habe 100 Thlr. nach 1 Jahre, 150 Thlr. nach 2 Jahren, 300 Thlr. nach 5 Jahren und 200 Thlr. nach 7 Jahren, und ich will diese Summe auf einmal haben, so ist klar, daß er mir dieselbe nicht sogleich geben kann, weil er sonst Schaden leiden würde. Entweder müßte er den gehörigen Disconto abziehen; oder wenn dies nicht geschehen soll, so muß eine Zeit ausgemittelt werden, wo diese Posten ohne seinen und meinen Schaden zusammen abgetragen werden können; und diese Zeit heißt der mittlere Zahlungstermin.

15. Wie kann man einen solchen mittlern Zahlungstermin finden?

Wenn man z. B. für die Summe von 10000

Thlr., von welcher 5000 Thlr. nach 2 Jahren, 3000 Thlr. nach 3 Jahren, und 2000 Thlr. nach 4 Jahren auszuzahlen sind, den mittlern Zahlungstermin finden soll; so verfahre man auf folgende Art:

Man berechne nach beliebigen Prozenten, z. B. nach 5 Prozent, die Zinsen, die dem Schuldner diese Posten tragen würden, wenn er sie in der ausgesetzten Zeit benutzte: so ist die Zeit, wenn die ganze Summe zu eben den Prozenten ausgeliehen die gefundenen Zinsen zusammen tragen würden, der mittlere Zahlungstermin. Nämlich:

1) 5000 Thlr. tragen nach 2 Jahren 500 Thlr. Zinsen;
2) 3000 Thlr. tragen nach 3 Jahren 450 Thlr. Zinsen;
3) 2000 Thlr. bringen nach 4 Jahren 400 Thlr. Zinsen.

Diese Zinsen addirt giebt 1350 Thlr.

Nun sucht man die Zeit, wie lange die ganze Summe von 10000 Thlr. zu 5 Prozent stehen müßte, um eben so viele Zinsen zu tragen. Nämlich:

$$\left.\begin{array}{r} 5 \text{ Thlr. Zinf. : } 1350 \text{ Thlr. Z.} \\ 10000 \text{ Thlr. Kap. : } 100 \text{ Thlr. K.} \end{array}\right\} = 1 \text{ J. : } x$$

$$5 . 10000 : 1350 . 100 = 1 \text{ J. : } x$$

$x = \frac{1350 . 100}{5 . 10000}$ J. $= \frac{27}{10}$ J. $= 2\frac{7}{10}$ Jahr. Dieses ist also der mittlere Zahlungstermin.

Erster Anhang.

Eintheilung der Münzen, Gewichte, Maaße und andere zählbare Dinge enthaltend.

1.

Die am häufigsten vorkommenden in- und ausländischen Münzen.

		Konventionsmünze; oder sogenanntes gutes Geld.
1 Karolin	gilt gewöhnlich	6 Thlr. 8 Gr. — Pf.
1 Pistole	= =	5 = — = — =
1 Louisd'or	= =	5 = — = — =
1 Friedrichsd'or	= =	5 = — = — =
1 Max'or	= =	4 = 5 = 4 =
1 Ducaten	= =	3 = — = — =
1 Goldgulden	= =	2 = 3 = — =
1 Laub- oder Albertsthlr.	gilt gew.	1 Thlr. 12 Gr.
1 Kronthaler	= =	1 = 12 =
1 Speziesthaler	= =	1 = 8 =
1 Altschock	= =	— = 20 =
1 Gülden meißnisch	= =	— = 21 =
1 Gulden sächsisch	= =	— = 16 =
1 Gulden rheinisch	= =	— = 13 = 4 Pf. oder 60 Kreutzer
1 Kreutzer gut	gilt	— Thlr. — Gr. 4 Pf.
1 Kreutzer kais.	=	— = — = $3\frac{1}{5}$ =
1 Zwanzigkreutzer (Kopfstück)	— =	5 = 4 =
1 Zehnkreuzer (halb. Kopfst.)	— =	2 = 8 =

1 Siebzehnkreuzer gilt — = 4 = 6⅔ =
1 Funfzehnkreutzer = — = 4 =
1 Pfund Sterling in England 6 Thlr. 12 Gr. — Pf.
1 Guinee = 6 = 6 =
1 Beutel in der Türkei 500 =
1 Piaster = — = 20 = — =
1 Zechine in Venedig 3 = — = — =
1 Rubel in Rußland 1 = 6 = — =
1 Piaster in Spanien 1 = 8 = — =
1 Krusade in Portugall — = 18 = — =
1 Dublone in Spanien 5 = 8 = — =
1 Kopecke in Rußland — = — = 3½ =
1 Real in Spanien — = 3 = — =
1 = in Portugall — = 1 = 5 =
1 Frank in Frankreich — = 6 = — =
1 Doppelfrank = — = 12 = — =
1 Sous = — = — = 4 =

1 Reichsthaler gilt 30 Kaisergroschen oder 90 Kreutzer oder 36 Mariengroschen.
1 Kaisergroschen gilt 3 Kreutzer.

1 Thaler sächsisch = 24 Gr.
1 Thaler preußisch gilt 30 Silbergroschen.
1 Thaler hannöverisch = 36 Mariengroschen.
1 Groschen gilt 12 Pf.
1 Silbergroschen gilt 12 leichte Pfennige.
1 Mariengroschen = 8 Pf.
1 Mark in Hamburg gilt 10 Gr.
1 = dänisch = 4 Gr. 8 Pf.
1 Batzen gilt 16 Pf.
1 Groot in Bremen gilt 4 Pf.
1 Schilling in England = 7 Gr. 6 Pf.

1 Schilling in Hamburg gilt 8 Gr.
1 = = Preußen = 2 Gr.
1 = = Niedersachsen = 7 Pf.
1 Stüber in Holland = 8 Pf.
1 Pfennig gilt 2 Heller.

2.
Gewichtmaaß.

A) Krämergewicht.

1 Ctr. hat 5 Steine oder 110 Pfd.
1 Stein = 22 Pfd.
1 Pfund = 4 Viertel oder 32 Loth.
1 Viertel = 8 Loth
1 Loth = 4 Quentchen.

Anmerkung. Der Ctr. hat an verschiedenen Orten eine verschiedene Anzahl Pfunde; bald 100, bald 104 bald 105. Der Ctr. beim Fleischer ist so schwer, als der Ctr. beim Kramer; aber er wird in weniger Pfunde getheilt. Daher ist 1 Pfd. beim Fleischer schwerer, als 1 Pfd. beim Kramer.

B) Gold und Silbergewicht.

1 Mark wiegt 8 Unzen oder 16 Loth oder 24 Karat.
1 Unze = 2 Loth
1 Loth = 6 Gran
1 Karat = 4 Gran
1 Gran = 3 Grän.

C) Schiffsgewicht.

1 Last hat 12 Schiffspfund oder 36 Ctr.

1 Schiffspfund oder Tonne hat 20 Lieſspfund
1 Lieſspfund hat 14 gemeine Pfund.

D) Apothekergewicht.

1 Pfund wiegt 12 Unzen oder 24 Loth
1 Unze = 2 Loth
1 Loth = 4 Drachmen
1 Drachme = 3 Scrupel
1 Scrupel = 20 Gran.

3.

Getraidemaaß.

Sachsen.

1 Wispel hat 2 Malter
1 Malter = 12 Scheffel, an einigen Orten 10.
1 Scheffel = 4 Viertel
1 Viertel = 4 Metzen
1 Metze = 4 Mäßchen.

Anmerkung. Der Scheffel ist verschieden. Im Königreich Sachsen ist der Dresdner üblich. Der Weimarische ist kleiner. 100 Weimarische Scheffel machen ungefähr 83 Dresdner.

Berlin.

1 Last hat 3 Wispel, bei Hafer und Gerste nur 2.
1 Wispel = 2 Scheffel
u. s. w. wie in Sachsen.
100 Berliner Scheffel machen ungefähr 51 Dresdner.

Erfurt.

1 Malter hat 4 Viertel
1 Viertel = 3 Scheffel

1 Scheffel hat 4 Metzen
1 Metze » 4 Mäßchen.
100 Erfurter Scheffel sind ungefähr 56 Dresdner.

Gotha.

1 Malter hat 2 Scheffel
1 Scheffel » 2 Viertel
1 Viertel » 4 Metzen
1 Metze » 4 Mäßchen.
100 Gothaische Scheffel sind ungefähr 81½ Dresdner.

Braunschweig.

1 Wispel hat 4 Scheffel
1 Scheffel » 10 Himten
1 Himte » 4 Vierfaß
1 Vierfaß » 4 Locher.
100 Himten machen etwa 28⅓ Dresdner Scheffel.

Kassel.

1 Viertel hat 2 Scheffel
1 Scheffel » 2 Himten
1 Himte » 4 Metzen
1 Metze » 4 Mäßchen
100 Kasseler Scheffel sind ungefähr 74½ Dresdner.

Frankfurt am Main.

1 Malter oder Achtel hat 4 Simmer
1 Simmer » 2 Metzen oder Mesten
1 Metze » 2 Sechter
1 Sechter » 4 Gescheid
1 Gescheid » 4 Mäßchen.
100 Simmer sind etwa 26½ Dresdner Scheffel.

4.

Getränkmaaß.

A) Biermaaß.

1 Gebräude hat 12 Faß
1 Faß = 2 Viertel
1 Viertel = 2 Tonnen
1 Tonne = 4 Achttheile
1 Achttheil = 26¼ Kannen oder Maaß.
1 Kanne = 2 Nößel

B) Weinmaaß.

1 Faß hat 6 Eimer
1 Eimer = 63 Maaß an manchen Orten mehr.
1 Maaß oder Kanne hat 2 Nößel.

5.

Papiermaaß.

1 Ballen hat 10 Rieß
1 Rieß = 20 Buch
1 Buch = 24 Bogen Schreib- und 25 Bogen Druckpapier.

6.

Längenmaaße.

1 Ruthe enthält bald mehr, bald weniger Fuß. Die Rheinländische (Preußische) hat 12 Fuß; die Kasseler und Erfurter 14; die Danziger 15; die Baseler, Braunschweiger und Nürnberger 16.
1 Fuß hat 12 Zoll
1 Zoll = 12 Linien

1 Linie hat 12 Scrupel
1 Klafter = 3 Ellen
1 Elle = 2 Fuß
1 geometrischer Schritt hat 5 Fuß
1 gemeiner = = $2\frac{1}{2}$ Fuß.
1 deutsche Meile hat 2 Stunden oder 2000 Rheinische Ruthen oder 24000 Rheinische Fuß.
1 englische Landmeile hat 5172 Rheinische Fuß; also sind ungefähr $4\frac{1}{2}$ englische Landmeilen soviel als 1 deutsche Meile.
1 englische Seemeile hat 6000 Rheinische Fuß; also sind 4 englische Seemeilen 1 deutsche Meile, oder 1 englische Seemeile $\frac{1}{2}$ Stunde.
1 französische Meile ist ungefähr $\frac{1}{2}$ deutsche Meile oder 1 Stunde.
1 Russische Werst ist $\frac{1}{7}$ deutsche Meilen; oder 7 Werste machen 1 deutsche Meile.

7.

Flächenmaaße.

Um Flächen zu messen, bedient man sich der Quadratmeilen, Quadratruthen, Quadratfuße ꝛc.

1 Quadratmeile ist eine Fläche, die eine Meile lang und eine Meile breit ist. Gewöhnlich wird die Größe der Länder nach Quadratmeilen bestimmt.
1 Quadratruthe ist eine Fläche, die 1 Ruthe lang und 1 Ruthe breit ist. 1 Rheinländische Quadratruthe hat 144 Quadratfuß.
1 Quadratfuß ist eine Fläche, die 1 Fuß lang und 1 Fuß breit ist. 1 Quadratfuß hat 144 Quadratzoll.
1 Quadratzoll hat 144 Quadratlinien.

1 Acker enthält an verschiedenen Orten eine verschiedene Anzahl Quadratruthen; bald 140, bald 240, bald 300 u. s. w.

1 Hufe, wornach besonders in Sachsen gerechnet wird, hat bald 12, bald 30 bis 36 Acker.

1 Morgen in Preußen enthält 180 Quadratruthen; die Quadratruthe zu 100 Quadratfuß.

8.

Zeitmaaß.

1 Jahrhundert oder Seculum ist eine Zeit von 100 Jahren.

1 Jahrzehnd ist eine Zeit von 10 Jahren.

1 Jahr hat 12 Monate oder 52 Wochen oder 365 Tage; ein Schaltjahr 366 Tage.

1 Monat hat 30 oder auch 31 Tage. 30 Tage haben: der April, Juni, September, November; 31 aber: der Januar, März, Mai, Juli, August, October, December. Der Februar hat 28 und in einem Schaltjahre 29 Tage.

1 Woche hat 7 Tage.
1 Tag = 24 Stunden.
1 Stunde = 60 Minuten.
1 Minute = 60 Secunden.

9.

Garnmaaße.

1 Stück Garn hat 6 Stränge oder Strehn.
1 Strehn = 40 Gebind.
1 Gebind = 20 Faden.
1 Faden = 4 Ellen lange Weife.

		An andern Orten enthält
1 Stück	—	4 Strehne.
1 Strehn		3 Zaspeln.
1 Zaspel		20 Gebinde.
1 Gebind		20 Faden.

10.

Zählbare Dinge.

1 Schock	hat	4 Mandeln.
1 Mandel	»	15 Stück.
1 Groß	»	12 Dutzend.
1 Dutzend	»	12 Stück.
1 Zimmer	»	4 Decher.
1 Decher	»	10 Stück.

Zweiter Anhang.

Uebungsaufgaben enthaltend.

1.

Uebungen im Numeriren, oder Zahlenlesen, und Zahlenschreiben.

I. Wie werden folgende Zahlen gelesen?

7, 9, 10, 17, 98, 100, 101, 147, 108, 199, 207, 386, 793, 805, 990, 1000, 1001, 1074, 2670, 2899, 3009, 4010, 8076, 9478, 10423, 900780, 367801, 147001007, 14582, 300107, 3070801, 4700136, 32007, 8200107, 400007, 8000017, 36007, 4236826, 3400786, 384582367, 8001002003, 36780023, 847823678910.

Wien, die Hauptstadt des Kaiserthums Oestreich hat 6500 Häuser und 296000 Einwohner. Im Jahr 1785 wurden darin verzehrt 42360 Ochsen, 71239 Kälber, 48994 Schafe, 147176 Lämmer, 98556 Schweine, 12000 Spanferkel, 40256 Metzen Erbsen, Bohnen, Linsen, 119613 Metzen Korn und Weizen, 88002 Metzen Gerste, 53101 Metzen Hafer, 20660 Fuder Heu, 1263180 Bund Stroh, 20940 Unschlitt, 291133 Klaftern Brennholz, 482250 Eimer inländischer

Wein, 11793 Eimer ausländischer Wein, 447574 Eimer Bier.

In Paris sind gegen 50000 Häuser und 700000 Einwohner. Für diese Stadt rechnet man jährlich 77000 Ochsen, 120000 Kälber, 540000 Hammel, 32400 Schweine, 32560 Tonnen Heringe, 33978 Stockfische, 500000 Klaftern Holz, 41315 Malter Steinkohlen, 3212 Malter Hafer, 10200000 Bund Heu und Stroh.

London, die Hauptstadt Englands, hat gegen 149000 Häuser und 1050000 Einwohner. Diese verzehren an 100000 Stück Rindvieh, 700000 Schöpse und Lämmer, 195000 Kälber, 238000 Schweine, 145460 Ctr. Butter.

Diese größte Stadt in Europa hat 34 Marktplätze, 71 viereckige, mit Grün bedeckte Rasenplätze, 580 Gasthöfe, 822 Kaffeehäuser, 7994 öffentliche Schenken, 508 Gotteshäuser, 4050 Lehr- und Erziehungsanstalten, 8000 Straßen, 242040 Familien. Die Straßen werden durch 50000 Laternen erleuchtet. Man findet in London gegen 40000 Schneidergesellen, und 36000 Modewaarenhändler.

Das feste Land der Erde wird in 5 große Theile getheilt, welche Erdtheile genannt werden. Sie heißen: Europa, welches 179059 Quadratmeilen, Asien, das 741093; Afrika mit 531638; Amerika mit 750000; und Australien, welches 180000 Quadratmeilen groß ist.

Nordhausen, eine preußische Stadt in Thüringen hat 1383 Häuser mit 9684 Einwohnern.

Im Jahr 1804 waren 132 Blasen im Gange, und es wurden 303560 Scheffel Branntweinschrot verbraucht. Jährlich werden hier 6000 Ochsen und 30000 Schweine gemästet, und gegen 388694 Scheffel Getraide verbraucht. Auch werden jährlich gegen 1700000 Pfund Oel geschlagen, und über 2600000 Stück Oelkuchen verfertigt, wodurch 200000 Thaler in Umlauf gesetzt werden.

Die Entfernung der Sonne von der Erde beträgt am ersten Januar 20499000, am ersten April und October 20851500, am ersten Julius 21204000 deutsche Meilen.

II. Wie werden folgende Zahlen geschrieben?

1) Acht. 2) Dreizehn. 3) Zwanzig. 4) Drei und vierzig. 5) Ein und achtzig. 6) Sieben und neunzig. 7) Hundert. 8) Hundert und neun. 9) Hundert und drei und zwanzig. 10) Hundert und achtzig. 11) Zweihundert und zwei und zwanzig. 12) Dreihundert und sieben.

13) Dreihundert und sechs und sechzig.
14) Vierhundert und neunzig.
15) Fünfhundert und fünf und achtzig.
16) Siebenhundert und neunzehn.
17) Tausend.
18) Tausend und eins.
19) Tausend und zwanzig.
20) Tausend einhundert und eins.
21) Tausend sechshundert und neun.
22) Zweitausend vierhundert und vier und neunzig.
23) Achttausend und siebenzig.

24) Zwölftausend dreihundert und sieben und neunzig.

25) Acht und siebenzig Tausend neun Hundert neun und neunzig.

26) Neun und achtzig Tausend und funfzig.

27) Hundert und zwei und sechzig Tausend sieben Hundert und drei und vierzig.

28) Fünfhundert drei und dreißig Tausend und eins.

29) Neunhundert Tausend und drei Hundert.

30) Eine Million und drei und neunzig.

31) Zwölf Millionen und vier Tausend.

32) Acht und sechzig Millionen drei Tausend und zehn.

33) Hundert und vier Millionen dreihundert vier und neunzig Tausend acht Hundert und sieben und zwanzig.

34) In einem Karpfen hat man über dreihundert Tausend Eier gezählt; in einer Schleihe über zwei Hundert und funfzig Tausend. In einem einzigen Mohnkopfe hat man über dreißig Tausend Saamenkörner gefunden.

35) Wenn ein Saamenkorn jährlich zwölffältige Frucht trägt, so könnte man aus einem einzigen Korne in zehn Jahren ein und sechzigtausend, neunhundert und siebenzehn Millionen, dreihundert vier und sechzigtausend zweihundert vier und zwanzig Körner erhalten.

36) Die Anzahl aller auf der Erde lebenden Menschen schätzt man auf Tausend einhundert Millionen. Von diesen sterben alle Tage zwei und

achtzig Tausend Menschen; dagegen werden täglich gegen neun und neunzigtausend geboren.

37) Im Jahr 1798 sind in London siebenzehntausend neunhundert und ein und zwanzig Menschen geboren worden, und achtzehntausend einhundert fünf und funfzig sind gestorben.

2.

Addition ganzer unbenannter ungleichbenannter Zahlen.

Wie viel beträgt die Summe folgender Zahlen?

1) 41 + 12 + 21
2) 143 + 245 + 510
3) 3204 + 1362 + 3423
4) 486 + 68 + 325 + 434
5) 5936 + 38 + 367 + 4501 + 378
6) 82743 + 920036 + 784231 + 9 + 367 + 97.
7) 9783482 + 3678 + 41013 + 8236790 + 452678
8) Es hat einer eingenommen: am Montage 18 Thlr.; am Dienstage 24 Thlr.; am Donnerstage 143 Thlr., am Sonnabende 47 Thlr.: wie viel hat er im Ganzen eingenommen?
9) Es hat ein Landwirth nach und nach an Getraide verkauft: 27 Scheffel; 133 Scheffel; 420 Scheffel; 386 Scheffel; 24 Scheffel: wie viel hat er im Ganzen verkauft?
10) Ein erwachsener Mensch hat 8 Schneidezähne, 4 Eckzähne, und 20 Backzähne: wie viel Zähne zusammen?
11) Wie viel sind zusammen: 368 Speziesthaler,

13718 Speziesthaler, 93 Speziesthaler, 6 Speziesthaler und 3785 Speziesthaler?

12) Der Bau eines Hauses hat gekostet: der Platz 120 Thaler; die Baumaterialien 459 Thaler; das Fuhrlohn 95 Thaler; die Zimmerleute 132 Thaler; die Maurer 318 Thaler; der Schlosser 69 Thaler; der Tischler 198 Thaler; an andern verschiedenen Ausgaben 130 Thaler. Wie viel beträgt dies zusammen?

13) Es hinterläßt jemand bei seinem Tode: 132 Thaler baares Geld; 1478 Thaler an außenstehenden Kapitalien; ein Haus für 3576 Thaler; und an Geräthschaften und sonstigen Vorräthen 537 Thaler: wie groß ist das gesammte Vermögen, welches er hinterläßt?

14) Wie viel beträgt die Summe folgender Zahlen: 56784 + 13426 + 967 + 24372 + 98 + 6?

15) Wie groß ist das gesammte deutsche Bundesheer, wenn Oestreich 94822 Mann, Preußen 79234 M., Baiern 35600 M. Sachsen 12000 M., Würtemberg 13955 M., Baden 10000 M., und die noch übrigen deutschen Mächte 55332 M. stellen?

16) In einem Garten stehen: 736 Aepfelbäume, 830 Birnbäume, 520 Kirsch- 489 Zwetschgen- 10 Pflaumen- und 4 Aprikosenbäume: wie viel Bäume in Allem?

17) Bei einer Auction wurden gelöst: aus den Aeckern 981 Thlr.; aus den Wiesen 193 Thlr., aus dem Hause 420 Thlr., aus vorräthigem

Getraide 203 Thlr. und aus den Mobilien 97 Thlr.: wie viel zusammen?

18) Ein Landmann hat auf dem Kornboden liegen: 136 Scheffel Korn, 120 Scheffel Weizen. 300 Scheffel Gerste, 96 Scheffel Hafer: wie viel Getraide im Ganzen?

19) In Stockholm wurden im Jahr 1818 geschlachtet: 24389 Rinder, 24308 Kälber, 35661 Schafe, 492 Ziegen, 7547 Schweine, 22156 Ferkel: wie groß ist die Anzahl der geschlachteten Thiere?

20) Ein Pachter hat in einem Jahre verkauft: an Getraide für 1785 Gulden; an Obst für 136 Gulden; an Butter und Käse für 259 Gulden; an Heu und Stroh für 185 Gulden; an Rindvieh für 539 Gulden; an Schweinen für 83 Gulden. Wie viel betragen diese sieben Posten zusammen?

21) Ein Mann besitzt an Kapitalien 78000 Thlr., an liegenden Gütern 36059 Thlr.; an Habschaften 19030 Thlr.: wie groß ist sein Vermögen?

22) Wie viel sind zusammen: 38420 Ctr., 66 Ctr.; 4070 Ctr.; 83673 Ctr.; 9 Ctr.; 30001 Ctr.?

23) Addire 30 + 631 + 420 + 3694 + 783001 + 87 + 3674592 + 47810 + 3640020307 + 842369.

24) Addire: 54783 + 118 + 20356 + 929046 + 819 + 7623 + 402133 + 1840623 + 7 + 33148 + 54 + 921 + 66 + 50287 + 1822 + 12706 + 6424 + 8706648.

25) Addire: 421 + 3276 + 121 + 840 + 3268 + 76093 + 1740 + 968 + 4355 + 24867 + 1342 + 5972 + 9176 + 100 + 82 + 7 + 13 + 444 + 7828.

3.

Subtraction unbenannter oder gleichbenannter Zahlen.

Subtrahire folgende Zahlen:

1) 8576 — 7354; 2) 7243 — 6131
3) 82976 — 50746; 4) 65097 — 31053.
5) 888888 — 354612; 6) 589732 — 254232.
7) 989899 — 180729.

Ferner:

8) 73638 — 34254; 9) 472565 — 135328.
10) 6474845 — 3293916; 11) 6141517 — 3050609.
12) 2222222 — 1952832; 13) 2625242 — 1953857.
14) 7896543 — 4598376.
15) 4703601 — 3612741.
16) 3604230 — 1275145.
17) 47602800 — 43712610.
18) 3600401070 — 1730130463.
19) 10509080 — 6491872.
20) 10506070 — 5443322.
21) 6407503 — 2586891.
22) 50060070 — 37584196.
23) 53007000 — 37238456.
24) 80005000 — 35768079.
25) 60003000 — 53074508.
26) 80000000 — 74532100.

27) 90000000 — 87632145.
28) 3000001 — 2137842.
29) 250300012 — 76125589.
30) 12400023 — 9074856.
31) 50000 — 421.
32) 7800000 — 96.
33) Im Jahr 1803 wurden in Hamburg geboren 4257; gestorben aber sind 4370: wie viel sind mehr gestorben, als geboren?
34) Christoph Columbus hat im Jahre 1492 Amerika entdeckt: wie lange ist es also bekannt?
35) Es hat einer jährlich Einnahme 386 Thlr., dagegen beträgt seine Ausgabe 299 Thlr., wie viel hat er demnach nach jährlich übrig?
36) Es hat jemand 378 Scheffel Korn, 192 Scheffel Gerste, 287 Scheffel Hafer liegen. Von jedem verkauft er 159 Scheffel: wie viel behält er von jedem übrig?
37) Wie alt ist jede dieser Erfindungen: Im Jahre 440 wurde die Glocke; 1050 die Geige oder Violine; 1312 die Orgel; 1530 das nützliche Spinnrad erfunden?
38) In welchem Jahre wurde ein Mann geboren, der jetzt 99 Jahre alt ist?
39) Jemand bezahlt an seiner Schuld, welche 1005 Thlr., beträgt nach und nach 50 Thlr., 68 Thlr., 103 Thlr., 75 Thlr., 297 Thlr.: wie viel hat er noch zu bezahlen?
40) Es hat jemand 136 Thlr. liegen; davon giebt er nach und nach aus 7 Thlr., 8 Thlr., 20 Thlr.,

37 Thlr., 10 Thlr., 14 Thlr.: wie viel behält er übrig?

41) Von 2090 Scheffeln Korn verkauft jemand 401 Scheffel, 96 Sch., 75 Sch., 102 Sch., 33 Sch.: wie viel behält er übrig?

4.

Multiplication.

Wie viel ist:

1) 5736 × 7. 2) 4832 × 9. 3) 3241434 × 5.
4) 3124342 × 6. 5) 9876543 × 8. 6) 5387 × 11.
7) 5938 × 12. 8) 579639 × 19. 9) 3784 × 123.
10) 7395 × 81. 11) 36784 × 378.
12) 28451 × 265; 13) 79623 × 456.
14) 5768 × 799; 15) 640258 × 925.
16) 236489 × 2662; 17) 689453 × 3456.
18) 364782 × 364782.
19) 78365479 × 123765.
20) 500367001 × 3782.
21) 6700053 × 360001.
22) 78392167 × 30006007.
23) 378453782 × 200007.
24) 39400 × 368.
25) 1374000 × 7426.
26) 7824590000 × 78234.
27) 345978 × 400.
28) 782536 × 56000.
29) 394857 × 60000.
30) 3918234 × 748000.
31) 7865300 × 400.
32) 39780000 × 78000.

33) 718590000 × 36900000.
34) 823000000 × 731000.
35) Multiplicire 76854 Scheffel mit 236.
36) " 2070900 Thaler mit 3001.
37) " 390001000 Ctr. mit 400600.
38) 8 × 9 × 17.
39) 12 × 104 × 99 × 365.
40) 2 × 7 × 83 × 112 × 4783 × 69.
41) 396 × 476 × 30 × 100 × 1000.
42) 3682 × 1000 × 10 × 100 × 10000.

5.

Division.

Wie viel ist:

1) 86482846 : 2.	7) 3879183 : 11.
2) 95526849 : 3.	8) 1481484 : 12.
3) 775838796 : 4.	9) 5429886 : 24.
4) 12358236 : 8.	10) 13676192 : 32.
5) 7134582 : 9.	11) 2290816 : 64.
6) 1367536 : 11.	12) 6410496 : 96.
	13) 167770515 : 213.

14) 373333212 : 108.
15) 309682296 : 132.
16) 2067696 : 346.
17) 8796114 : 486.
18) 2847000 : 736.
19) 73642044 : 987.
20) 1025133848 : 2558.
21) 6403023 : 3272.
22) 1026056 : 4008.

23) 1779855 : 385.
24) 970307328 : 6736.
25) 55575912 : 18168.
26) 22195875563 : 38209.
27) 17251934000 : 157840.
28) 3859132746 : 975962.
29) 323782108052 : 6438172.
30) 2396876003700 : 51796348.
31) 538750 : 10
32) 124697000 : 200
33) 6242302000 : 1000.
34) 780004000 : 4000.
35) 12345600 : 12000.
36) 9876000 : 2400.
37) 396700000 : 3480000.
38) 5300000013 : 478000.

6.
Vermischte Beispiele aus allen vier Rechnungsarten.

1) Von einem Gänseey wiegt im Durchschnitte die Schaale 9 Quentchen; die Dotter 17, und das Weiße 22 Quentchen. — Von einem Hühnerey die Schaale 2; die Dotter 4; das Weiße 7 Quentchen. Wie viel wiegt also ein Ey von jeder Art?
2) Im Königreiche Preußen zählt man 1027 Städte, 248 Flecken und 34000 Dörfer: wie viel Ortschaften zusammen?
3) In Nürnberg schlachtete man im Jahr 1775 einen Ochsen, welcher 2794 Pfd. wog. Die Haut war 70 Pfd. schwer, und an Talg hatte

er 340 Pfd.: wie schwer war der übrige Theil des Ochsen?

4) Wie viel sind zusammen: 6478 Thlr., 96 Thlr., 367 Thlr., 5 Thlr., 678001 Thlr., 3470 Thlr., 82065 Thlr.?

5) Das Licht ist ungefähr 896715 mal schneller, als der Schall: wie viel Fuß kann es also in einer Secunde zurücklegen, da der Schall in einer Secunde 1078 Fuß zurücklegt?

6) Ein Landmann, der in die Stadt zu Markte ging, nahm ein: 16 Thlr. für Getraide; 2 Thlr. für Butter; 1 Thlr. für Eier; 25 Thlr. für Leinwand; 5 Thlr. für Holz. Davon gab er aus: 2 Thlr. für Kaffee; 1 Thlr. für Zucker; 15 Thlr. für Tuch; 1 Thlr. für Taback; 3 Thlr. für ein Paar Stiefeln: wie viel hat er im Ganzen eingenommen, und ausgegeben? Und wie viel hatte er noch übrig?

7) Die Menge Blut, welche in dem Körper eines Erwachsenen sich befindet, wird auf 28 Pfd. geschätzt. Wenn nun ein solcher Mensch 140 Pfd. wiegt: den wie vielten Theil seines Gewichts macht seine Blutmasse aus?

8) Das feste Land der Erde wird in 5 große Theile getheilt, welche Erdtheile heißen. Sie heißen: Europa, welches 179059; Asien, das 741093; Afrika, das 531638; Amerika, welches 750000, und Australien, oder Südindien, das 180000 Quadratmeilen groß ist. Wie viele Quadratmeilen enthält also das feste Land der Erde?

Und um viel ist Europa kleiner, als jeder der übrigen Erdtheile?

9) Unter die Bürger einer Stadt, deren Anzahl 2575 beträgt, sollen gleich vertheilt werden 36780 Thlr.: wie viel wird jeder erhalten?

10) Der nächste Fixstern nach unsrer Sonne soll 206264 mal weiter von der Erde entfernt seyn, als die Sonne. Wie weit ist er also entfernt, da die Sonne 20630754 Meilen von der Erde entfernt ist?

11) Ein Kaufmann erhielt 18 Ctr. Zucker; 14 Ctr. Kaffee; 24 Ctr. Rosinen; 13 Ctr. Mandeln. Vom Zucker hat er verkauft 12 Ctr., vom Kaffee 9 Ctr., von den Rosinen 11 Ctr. und von den Mandeln 6 Ctr.: wie viel Ctr. Waaren erhielt er im Ganzen? Wie viel Ctr. hat er verkauft, und wie viel hat er noch übrig?

12) Die Erde wirft nach der der Sonne entgegengesetzten Seite hin einen Schatten, der 217 mal so lang ist, als der Halbmesser der Erde, welcher 860 Meilen beträgt: wie lang ist also der Erdschatten?

7.

Reduction benannter Zahlen.

1) Wie viel Pfennige sind 654 Thlr.?
2) Wie viel Pfennige sind 3894 Thlr.?
3) Wie viel Pfennige sind 163 Thlr. 18 Gr.
4) Wie viel Pfennige sind 16 Thlr. 3 Gr. 11 Pf.?
5) Wie viel Pfunde sind 3 Ctr.?
6) Wie viel Lothe sind 36 Pfd.?

7) Wie viel Quentchen sind 27 Loth?
8) Wie viel Lothe sind 17 Ctr.?
9) Wie viel Quentchen sind 83 Pfd.?
10) Wie viel Qutch. sind 1 Ctr. 3 Pfd. 14 Loth 1 Qutch.
11) Wie viel Minuten machen 8 Tage 12 Stunden?
12) Wie viel Stunden hat ein Jahr von 365 Tagen 6 Stunden?
13) Wie viel Secunden sind 7 Wochen 3 Tage 1 Stunde 4 Minuten 59 Secunden?
14) Wie viel Bogen sind 120 Ballen, 3 Rieß, 9 Buch?
15) Wie viel Metzen sind 3 Scheffel 2 Viertel?
16) Wie viel Scheffel sind 13 Malter 7 Scheffel?
17) Wie viel Viertel sind 5 Malter 1 Scheffel 3 Viertel?
18) Wie viel Garben machen 4 Schock 3 Mandel?
19) Wie viel Stück sind 284 Dutzend?
20) Wie viel Minuten, Stunden und Tage sind 24000 Secunden?
21) Wie viel Ctr. sind 1236783 Quentchen?
22) Wie viel Thaler und Groschen sind 21367 Pf.
23) Wie viel Jahre machen 1076 Wochen?
24) Wie viel Eimer machen 3671 Maaß?
25) Wie viel Pfunde machen 1678 Lothe?
26) Wie viel Ballen machen 134400 Bogen Schreibepapier, und wie viel Ballen eben so viel Druckpapier?
27) Wie viel Pfennige hat ein Speziesthaler?
28) Wie viel Speziesthaler sind 3678 Groschen?
29) Wie viel Pfennige betragen 126 Kopfstück?
30) Wie viel betragen 678 Pf. Kopfstück?

31) Wie viel Scheffel sind 71 Viertel?
32) Wie viel Malter sind 3782 Metzen?
33) Wie viele Ducaten machen 10400 Thaler?
34) Wie viel Groschen macht 1 Louisd'or?
35) Wie viel Karolin sind 141367 Groschen?
36) Wie viel Speziesthaler sind 78362 Pf.?
37) Wie viel Pfennige betragen 27 Viergroschenstücke?
38) Wie viel Schocke sind 3678 Stück?
39) Wie viel Dutzend sind 7820 Stück?
40) Wie viel Acker sind 3670 Quadratruthen?
41) Wie viel Zolle sind 6 Ruthen 2 Fuß 7 Zoll?
42) Wie viel Ruthen sind 83901 Zolle?
43) Wie viel Wochen hat ein Jahrhundert?

8.

Addition ungleichbenannter Zahlen.

1) Addire: 3 Thlr. 5 Gr. 4 Pf.
2 = 7 = 8 =
5 = 8 = 6 =

2) Addire: 37 Ctr. 18 Pfd. 4 Loth 1 Qutch.
73 = 9 = 3 = 3 =
136 = 97 = 29 = 1 =
24 = — = — = 2 =
3 = 4 = — = —

3) Addire: 14 Malter 3 Sch. 1 Viert. 1 Metze.
6 = 1 = 3 = 2 =
— = — = 3 = 1 =
4 = 9 = — — =
5 = — = 3 = 2 =

4) Addire: 5 Ballen 6 Rieß 18 Buch 12 Bogen.
7 = 8 = — = — =
8 = 7 = 19 = — =
3 = 5 = 13 = 7 =
4 = 4 = — = 21 =

5) Es nahm Jemand ein am Montage 1 Thlr.; am Dienstage 2 Thlr., 3 Gr. 9 Pf., an Mittwoch 5 Thlr. 1 Gr., am Donnerstage 16 Gr. 7 Pf.; am Freitage 3 Thlr. — Gr. 1 Pf.; am Sonnabende 6 Thlr. 7 Gr. 4 Pf. Wie viel hat er die Woche über eingenommen?

6) Ein Kaufmann erhielt 3 Wagen mit Zucker. Auf dem ersten waren 28 Ctr. 74 Pfd. 20 Loth; auf dem zweiten 30 Ctr. 82 Pfd. 19 Loth; auf dem dritten 14 Ctr. 64 Pfd. 18 Loth. Wie viel Zucker hat er überhaupt erhalten?

7) Eine Bäuerin verkaufte für 1 Thlr. 2 Gr. Milch; für 1 Thlr. 18 Gr. Eier; für 2 Thlr. 3 Gr. Butter; für 13 Gr. 6 Pf. Käse; für 7 Thlr. 3 Gr. 9 Pf. Leinwand; für 3 Thlr. 18 Gr. 11 Pf. Garn: wie viel hat sie eingenommen?

8) Vier Taglöhner haben an einem Hause gearbeitet; der erste 8 Wochen, 3 Tage 7 Stunden; der zweite 5 W. 5 T. 4 St.; der dritte 8 W. 3 T. 7 St.; und der vierte 3 W. 4 T. 6 St. Wie lange haben sie zusammen daran gearbeitet?

9) Ein Bauer hat von seinem erdroschenen Getraide aufgehoben: 6 Scheffel 3 Viertel 1 Metze;

4 Scheffel 1 Viertel 2 Metzen; 18 Scheffel 3 V.; 13 Scheffel — V. 1 Mtze: wie viel in Allem?

10) Ein Papiermüller hat verkauft: 6 Ballen 3 Rieß 9 Buch 12 Bogen; 14 Ballen 1 Rieß 2 Buch 23 Bogen; 10 Ballen 8 Rieß 7 Buch 1 Bogen; 33 Ballen 9 Rieß 7 Buch 1 Bogen: wie viel in Allem?

11) Wie viel sind: 8 Wochen 5 Tage 20 Stunden 59 Minuten; 14 Wochen 3 Tage 1 Stunde 12 Minuten; 4 W. 1 T. 22 St. 1 M.?

12) Ein Weinhändler hat verkauft 18 Fuder 9 Eimer 36 Maaß; 12 Fuder 7 Eimer 13 Maaß; 9 Fuder 1 Eimer 27 Maaß und 17 Fuder 1 Eimer 1 Maaß: wie viel zusammen?

13) Es hat ein Pachter ausgesäet: 18 Scheffel 4 Viertel 3 Metzen; 12 Sch. 1 V. 2 M.; 36 Sch. 3 V. 2 M.; 19 Sch. 1 V. 3 M.: wie viel zusammen?

14) Ein Bauer erndete ein: 14 Schock 3 Mandel 12 Garben; 4 Schock 1 Mandel 3 Garben; 18 Schock — Mandel 1 Garbe; 24 Schock 3 Mandel 13 Garben: wie viel zusammen?

15) Einer hat ausgegeben 18 Ducaten 2 Thlr. 12 Gr.; 4 Duc. 1 Thlr. 20 Gr. 3 Pf.; 35 Duc. 3 Thlr. 1 Gr.; 13 Duc. 2 Thlr. 14 Gr. 9 Pf.: wie viel zusammen?

16) Einer nahm ein: 103 Louisd'or 4 Thlr. 3 Gr. 29 L. 1 Thlr. 8 Gr.; 96 L. 5 Thlr. 21 Gr.; 13 L. 4 Thlr. 12 Gr.: wie viel zusammen?

17) Addire: 28 Speziesthaler 3 Gr. 7 Pf.
13 = 8 = 1
27 = — = 3
4 = 21 = 9
130 = 23 = 1

18) Wie viel sind zusammen: 3 Kopfstück 2 Gr. 1 Pf.; 9 Kpfst. 4 Gr. 7 Pf.; 18 Kpfst. 1 Gr. 9 Pf.; 23 Kpfst. 5 Gr. 8 Pf.?

19) Es ist ein Fürst zur Regierung gekommen im Jahr 1775 den 18. April, und hat 24 Jahr 9 Monate 20 Tage regiert: wenn ist er gestorben?

20) Es hat sich Jemand verheirathet im Jahr 1784 den 10. Januar, und in der Ehe gelebt 12 Jahr 8 Monate 28 Tage: wann ist er, oder seine Frau gestorben?

21) Es ist Jemand geboren den 11. Jun. 1765 und ist alt geworden 51 Jahr 8 Monate 3 Tage: wann ist er gestorben?

22) Es ging Jemand in die Fremde den 19. Sept. 1801, und blieb weg 10 Jahr 9 Monate 12 Tage: wann ist er wieder gekommen?

9.

Subtraction ungleichbenannter Zahlen.

1) Von 5 Thlr. 18 Gr. 9 Pf. sollen abgezogen werden 2 Thlr. 9 Gr. 4 Pf.: wie viel bleibt?

2) Von 37 Schock 3 Mandel 8 Garben werden 15 Schock 2 Mandel 7 Garben gedroschen: wie viel bleibt noch?

3) Von 8 Ctr. 96 Pfd. 18 Loth 3 Dutch. werden verkauft 6 Ctr. 12 Pfd. 9 Loth 2 Dutch.: wie viel bleibt?

4) Ein Landmann ist schuldig 206 Thlr. 4 Gr. 2 Pf., daran bezahlt er 148 Thlr. 4 Gr. 2 Pf.: wie viel bleibt er noch schuldig?

5) Ein Landmann hat 24 Scheffel 1 Viertel 2 Metzen Korn; davon verkauft er 13 Sch. 3 V. 3 Mtz.: wie viel behält er übrig?

6) Ein Papierhändler verkaufte im Jahr 1822. 30 Ballen 9 Rieß 14 Buch Schreibepapier; im J. 1824 aber 55 Ballen 7 Rieß 19 Buch. Wie viel hat er 1823 mehr verkauft?

7) Ein Wagen mit dem darauf geladenen Heu wiegt 29 Ctr. 45 Pfd. Der Wagen allein wiegt 8 Ctr. 87 Pfd. Wie viel Heu war auf dem Wagen?

8) Es nimmt Jemand ein: 123 Thlr. 9 Gr. 4 Pf. und giebt hiervon aus 112 Thlr. 17 Gr. 9 Pf.: wie viel behält er übrig?

9) Ein Kaufmann verkauft von 8 Ctr. 16 Loth Zucker, 7 Ctr. 45 Pfd. 23 Loth: wie viel bleibt ihm übrig?

10) An einer Schuld von 1002 Thlr. 7 Pf. wird bezahlt: 982 Thlr. 3 Gr. 9 Pf.: wie viel bleibt noch?

11) Fritz hat 3 Schock 3 Mandel 12 Nüsse, und verspielt davon 1 Schock 1 Mandel 13 Nüsse: wie viel behält er übrig?

12) Es kauft Jemand ein Haus für 753 Thlr.

7 Gr. 5 Pf., und verkauft es wieder für 1000 Thlr: wie viel hat er daran gewonnen?

13) Ein Bauer verkauft von seiner Wiese, welche 120 Ruthen 8 Fuß 7 Zoll lang ist, ein Stück von 72 Ruthen 9 Fuß 8 Zoll: wie lang ist die Wiese noch?

14) Ein Schmied hatte vor einiger Zeit 120 Ctr. 45 Pfd. vorräthiges Eisen, nun hat er selbiges bis auf 57 Ctr. 86 Pfd. 3 Viertel verarbeitet: wie viel Eisen verschmiedete er?

15) Ein junger Mensch, welcher in die Fremde reiste, nimmt sich vor, erst nach 12 Jahren wieder nach seiner Heimath zurückzukehren; nun ist er schon 9 Jahr 17 Wochen 5 Tage weg: wie lange muß er sich noch entfernt halten?

16) Von 3 Schock Leinwand werden verbraucht 1 Schock 2 Mandel 3 Ellen: wie viel bleibt noch?

17) Wie alt war Jemand am 30. Januar 1824, welcher den 6. Mai 1780 geboren wurde?

18) Wie alt war Jemand am 13. März 1823, der am 19. Sept. 1777 geboren war?

19) Friedrich der Große, der berühmte König von Preußen, wurde geboren 1712 den 24. Jan., und starb den 17. Aug. 1786. Wie alt ist er geworden?

20) Ein Kapitalist hatte im Jahre 1805 den 24. Mai Geld ausgeliehen, und dasselbe 1812 den 5. April wieder empfangen: wie lange hatte dieses Geld auf Zinsen gestanden?

21) Es starb Jemand 1814 den 8. Mai, Abends 12 Uhr, in einem Alter von 46 Jahren, 3 Mo-

naten 23 Tagen 11 Stunden: wann war er geboren?

22) Heinrich starb 1824 den 4. April früh um 8 Uhr, und hatte gelebt 18 Jahre 4 Monate 11 Tage und 3 Stunden. Wann ward er geboren?

23) Ein Vater hatte 3 Kinder: Hugo, geboren den 9. October 1810; Heinrich, geboren den 1. März 1812; und Otto, geboren den 10. Dec. 1815. Wie alt war jedes am 3. März 1824?

24) Ein junger Handwerker ging in die Fremde den 18. April 1815, und kam zurück am 8. Dec. 1819. Wie lange war er in der Fremde gewesen?

10.

Multiplication einer ungleichbenannten Zahl mit einer unbenannten.

Multiplicire:

1) 8 Thlr. 6 Gr. 3 Pf. mit 9.
2) 113 Thlr. 7 Gr. 11 Pf. mit 24.
3) 13 Ctr. 67 Pfd. 31 Loth 3 Qutch. mit 113.
4) 4 Ctr. 1 Pfd. 8 Loth 1 Qutch. mit 8.
5) 3 Wochen 6 Tage 13 St. 4 Min. mit 7.
6) 12 Ruthen 9 Fuß 3 Zoll mit 63.
7) 28 Scheffel 3 Viertel 1 Metze mit 9.
8) 14 Ducaten 2 Thlr. 17 Gr. 3 Pf. mit 6.
9) 39 Ballen 6 Rieß 5 Buch 13 Bogen mit 27.
10) 16 Schock 1 Mandel 14 Stück mit 79.
11) 13 Dutzend 9 Stück mit 215.
12) 126 Thlr. 19 Gr. 11 Pf. mit 15.
13) 16 Ctr. 3 Pfd. 4 Qutch. mit 36.

14) 8 Thlr. 3 Pf. mit 124.
15) 16 Speciesthaler 3 Kopfstück mit 12.

11.

Division in ungleichbenannten Zahlen.

1. Wenn der Divisor unbenannt ist.

1) Wie viel giebt 6 Thlr. 8 Gr. 8 Pf. dividirt durch 8?
2) 147 Thlr. 21 Gr. 7 Pf. werden unter 7 Personen getheilt: wie viel erhält jede?
3) Wie viel giebt 8 Ctr. 81 Pfd. 3 Loth 1 Qutch. dividirt durch 12?
4) Wie viel giebt 113 Malter 7 Scheffel 3 Viertel 1 Metze dividirt durch 8?
5) Wie viel giebt 9 Ruthen 5 Fuß 8 Zoll dividirt durch 3?
6) Wenn 3 Brüder sich in 4560 Thlr. 18 Gr. 7 Pf. theilen: wie viel bekommt jeder?
7) 6 Bauern haben sich in 19 Schock 3 Mandeln 14 Garben zu theilen: wie viel trägt's jedem?
8) 9 Soldaten hatten eine Beute von 367 Thlr. 8 Gr. 1 Pf. zu theilen: wie viel kam auf jeden?
9) Eine Bauersfrau hat von 36 Pfd. 13 Loth 3 Qutch. Butter den 3ten Theil verkauft: wie viel also?
10) 7 Buchbinder theilen 9 Ballen 8 Rieß 17 Buch Schreibepapier: wie viel erhält jeder?
11) 16 Gäste haben in einem Wirthshause zusammen 16 Thlr. 12 Gr. 9 Pf. verzehrt: wie viel mußte jeder bezahlen?
12) Wie viel ist der 24. Theil von 19 Malter 6 Scheffel 1 Viertel 3 Metzen?

13) 7 Musikanten verdienten auf 6 Kirchweihen 53 Thlr. 19 Gr. 1 Pf.: wie viel trägts jedem?

14) 6 Tagelöhner verdienen 16 Thlr. 3 Pf.: wie viel muß jeder erhalten?

15) 301 Ctr. 38 Pfd. 24 Loth dividirt durch 9: wie viel kommt?

16) Das Alter eines Sohnes beträgt nur den 5ten Theil von dem Alter des Vaters, der 66 Jahr 20 Tage und 20 Stunden alt ist. Wie alt ist der Sohn?

17) Ein Landmann hat 3 Malter 5 Scheffel 1 Viertel 3 Metzen Korn; davon verkauft er den 7ten Theil: wie viel also?

18) 18 Dutzend 11 Stück dividirt durch 7: wie viel giebts?

19) 3 Speciesthaler 4 Kopfstück 3 Gr. 1 Pf. soll unter 2 Kinder vertheilt werden: wie viel wird jedes erhalten?

20) 135 Thlr. 9 Gr. 7 Pf. dividirt durch 18: wie viel kommt?

2. Wenn der Divisor auch benannt ist.

Wie viel mal liegen:

21) 18 Thlr. 8 Gr. 3 Pf. in 145 Thle. 1 Gr. 7 Pf.?

22) 9 Ctr. 3 Pfd. 8 Loth in 33 Ctr. 77 Pfd. 23 Loth?

23) 36 Thlr. 2 Gr. in 107 Thlr. 18 Gr. 11 Pf.

24) 2 Ballen 9 Bogen in 19 Ballen 2 Rieß 4 Buch?

25) 28 Ruthen 9 Fuß 2 Zoll in 103 Ruthen 1 Fuß 7 Zoll?

26) 16 Wochen 5 Tage 3 Stunden 7 Min. 2 Sec. in 1 Jahre 48 Wochen 12 Stunden?

12.

Vermischte Aufgaben, aus den Rechnungsarten mit benannten Zahlen.

1) Wenn man 100 Thlr. hat, und giebt davon aus 15 Thlr. 16 Gr. 6 Pf. ferner 24 Thlr. 4 Gr. 4 Pf.; ferner 6 Thlr. 18 Gr. 9 Pf.; ferner 32 Thlr. 8 Gr. 10 Pf. wie viel wird übrig bleiben?

2) Es hinterläßt Jemand ein Vermögen, das aus folgenden Stücken besteht: an baarem Gelde 572 Thlr. 18 Gr. 9 Pf.; an Grundstücken 2845 Thlr. 16 Gr.; an Gebäuden 2050 Thlr.; an Möbeln und Geräthschaften 1425 Thlr. 12 Gr. 8 Pf.; an Silberwerk und andern Kostbarkeiten 672 Thlr. 18 Gr. 6 Pf.; an Kleidung und Wäsche 427 Thlr. 13 Gr. 8 Pf.; an mancherlei Vorräthen 106 Thlr. 9 Gr. 9 Pf.: — dagegen finden sich noch verschiedene Schulden, nämlich: an baar geliehenem Gelde 1200 Thlr.; eine Rechnung für Bau-Reparaturen 124 Thlr. 15 Gr.; eine Rechnung vom Kaufmanne 56 Thlr. 17 Gr. 9 Pf.; eine Rechnung vom Schneider und Schuhmacher 42 Thlr. 13 Gr. 6 Pf.; und die Begräbnißkosten betragen 85 Thlr. 16 Gr. 3 Pf. In den Ueberrest theilen sich 5 Erben: wie viel wird ein jeder von diesen bekommen?

3) 4 Personen, die eine gemeinschaftliche Kasse

haben, nahmen ein: 16 Thlr. 8 Gr. 4 Pf.; 104 Thlr.; 36 Thlr. 7 Gr.; 19 Gr. 3 Pf.; 24 Thlr. 3 Gr. 1 Pf. Dagegen gaben sie aus: 10 Thlr. 1 Gr. 4 Pf.; 7 Thlr. 19 Gr. 8 Pf.; 3 Thlr. 11 Gr. 7 Pf. und 16 Thlr. Sie wollen den Rest theilen: wie viel wird jeder erhalten?

4) Ein Kaufmann erhält 5 Wagen mit Waaren. Auf dem ersten sind 18 Ctr. 66 Pfd.; auf dem zweiten 23 Ctr. 27 Pfd. 18 Loth; auf dem dritten 11 Ctr. 6 Pfd.; auf dem vierten 27 Ctr.; und auf dem fünften 13 Ctr. 19 Pfd. Von diesen Waaren verkauft er nach und nach: 6 Ctr. 7 Pfd. 13 Loth; 30 Ctr. 18 Pfd. 40 Ctr. und 5 Ctr. 6 Pfd. 23 Loth: wie viel behält er übrig?

5) Eine Haushälterin erhält 16 Thlr.; davon giebt sie aus für Fleisch 4 Thlr. 5 Gr.; für Zugemüse 2 Thlr. 6 Gr. 6 Pf.; für Milch 5 Gr. 9 Pf.; für Obst 8 Gr.; für Fische 16 Gr. 3 Pf.; für Hühner 8 Gr. 3 Pf.; für Tauben 4 Gr. 3 Pf.; für Licht 8 Gr.; für Butter 1 Thlr. 3 Gr.; für Bier 2 Thlr. 2 Gr. 4 Pf.; für Eier 8 Gr. 4 Pf.: wie viel behält sie noch übrig?

6) Der Frühling und Sommer dauern in unsern Gegenden zusammen 186 Tage 14 Stunden 53 Minuten; dagegen der Herbst und Winter 178 Tage 14 Stunden 56 Minuten. Wie viel sind die erstern beiden Jahreszeiten länger?

7) Martin Luther war zu Eisleben am 10. Nov. 1483 geboren, und starb am 18. Febr. 1546: wie alt ist er geworden?

8) Wegen des alle 4 Jahre eintretenden Schalttages nehmen wir das Jahr zu 365 Tagen 6 Stunden an. Da es aber genau nur 365 T. 5 St. 48 Min. 48 Sec. lang ist: um wie viel nimmt der Kalender das Jahr zu groß an?

9) Der Buchwaizen vervielfältigt sich 40fach: wenn nun 2 Scheffel 3 Viertel 2 Metzen ausgesäet worden ist: wie viel wird man erhalten?

10) Ein Erwachsener Mensch nimmt an Speise und Getränk täglich etwa 8 Pfd. zu sich. Der 50ste Theil davon wird in Theile des Körpers verwandelt, das Uebrige geht aus demselben ungenützt fort: wie viel beträgt dieser 50ste Theil von 8 Pfd.?

11) Wie lange steht ein Kapital, welches den 29sten April 1798 ausgeliehen und den 7. Oct. 1816 zurückgezahlt worden ist?

12) Eine gerade Straße, eine Allee u. s. w. scheint bekanntlich immer schmaler zu werden, je länger sie ist. Ist sie über 5000mal länger, als sie breit ist; so wird sie ganz zusammenlaufen. Wie lang müßte also eine Allee seyn, deren Baumreihen 1 Ruthe 2 Fuß 6 Zoll von einander abstehen, wenn man, an dem einen Ende derselben stehend, sie zusammenlaufend erblicken würde?

13.

Abkürzen der Brüche.

Wie heißen folgende Brüche in den kleinsten Zahlen ausgedrückt?

1) $\frac{85}{153}$; 2) $\frac{182}{2145}$; 3) $\frac{693}{792}$; 4) $\frac{945}{1512}$; 5) $\frac{625}{1000}$;
6) $\frac{7040}{10560}$; 7) $\frac{224}{608}$; 8) $\frac{1200}{1776}$; 9) $\frac{195}{1456}$; 10) $\frac{252}{2315}$
11) $\frac{264}{352}$; 12) $\frac{1152}{1440}$; 13) $\frac{637}{1001}$; 14) $\frac{6426}{6545}$; 15) $\frac{221}{1190}$
16) $\frac{1512}{3528}$; 17) $\frac{1960}{4704}$; 18) $\frac{2337}{2460}$; 19) $\frac{9525}{10541}$;
20) $\frac{20736}{31104}$; 21) $\frac{21080}{37680}$; 22) $\frac{11616}{12672}$; 23) $\frac{13608}{24192}$;
24) $\frac{598}{897}$; 25) $\frac{3487}{3804}$; 26) $\frac{109989}{111100}$; 27) $\frac{55296}{165888}$;
28) $\frac{31752}{52920}$; 29) $\frac{134352}{141980}$; 30) $\frac{466560}{559872}$; 31) $\frac{41472}{248832}$;
32) $\frac{22680}{31752}$; 33) $\frac{13752}{36099}$; 34) $\frac{24734}{111303}$; 35) $\frac{51735}{189693}$;
36) $\frac{6172835}{160493717}$; 37) $\frac{73456}{948728}$; 38) $\frac{1728}{6912}$; 39) $\frac{1659}{26067}$
40) $\frac{83674007}{1773480002}$.

14.

Brüche von verschiedener Benennung auf einerlei Benennung zu bringen.

Bringe folgende Brüche unter einerlei Benennung, und zwar unter den kleinsten Generalnenner:

1) $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$;
2) $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{7}{18}$.
3) $\frac{7}{22}$, $\frac{5}{11}$, $\frac{14}{55}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{9}{10}$.
4) $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{14}{15}$, $\frac{7}{30}$, $\frac{19}{20}$.
5) $\frac{8}{25}$, $\frac{9}{15}$, $\frac{12}{50}$, $\frac{28}{100}$, $\frac{3}{5}$.
6) $\frac{5}{9}$, $\frac{2}{17}$, $\frac{8}{16}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$.
7) $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{19}{32}$, $\frac{23}{24}$.
8) $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{13}{20}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{13}{28}$.
9) $\frac{8}{13}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{4}{11}$, $\frac{9}{25}$.
10) $\frac{12}{48}$, $\frac{24}{72}$, $\frac{48}{96}$, $\frac{104}{624}$, $\frac{8}{20}$.

15.

Addition der Brüche.

Addire:

1) $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{4}{7}$.

2) $\frac{9}{11}$, $\frac{7}{11}$, $\frac{3}{11}$, $\frac{8}{11}$.

3) $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{8}$.

4) $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$.

5) $\frac{8}{11}$, $\frac{7}{22}$, $\frac{5}{11}$.

6) $\frac{5}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{4}{5}$.

7) $\frac{2}{7}$, $\frac{4}{21}$, $\frac{5}{42}$, $\frac{9}{14}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$.

8) 8, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, 9, 6, $\frac{8}{9}$, 3, $\frac{4}{7}$.

9) $\frac{6}{11}$, 4, $\frac{5}{7}$, 8, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, 9, 12.

10) 12, $\frac{9}{10}$, $\frac{3}{7}$, 15, 3, $\frac{12}{9}$, 4.

11) $3\frac{1}{2}$, $5\frac{3}{4}$, $7\frac{5}{7}$, $3\frac{8}{11}$.

12) $8\frac{3}{4}$, $94\frac{2}{3}$, $\frac{7}{15}$, $9\frac{1}{2}$, $17\frac{3}{8}$, $\frac{12}{25}$, $102\frac{19}{60}$, $52\frac{11}{18}$, $500\frac{17}{32}$, $87\frac{19}{64}$.

13) $9\frac{1}{2}$, $5\frac{3}{4}$, $7\frac{5}{8}$, $101\frac{19}{24}$.

14) $54\frac{1}{2}$, $73\frac{3}{4}$, $25\frac{5}{8}$, $17\frac{9}{16}$, $25\frac{11}{12}$.

15) $36\frac{7}{8}$, $\frac{9}{16}$, 13, $4\frac{1}{2}$, 5, 1047, $\frac{8}{13}$, $12\frac{7}{8}$, $4\frac{1}{4}$, 37, $\frac{4}{5}$.

16) Ein Kaufmann verkauft an einem Tage $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{5}{13}$, $\frac{12}{17}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{11}{12}$ Pfd.: wie viel Pfd. hat er überhaupt verkauft?

17) Ein Bürger zahlte $\frac{6}{9}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{17}{18}$, $\frac{3}{4}$ Thlr. Steuer: wie viel zusammen?

18) Es nimmt einer ein $\frac{3}{4}$ Thlr., $\frac{2}{3}$ Thlr., $\frac{1}{2}$ Thlr. $\frac{7}{8}$ Thlr., $\frac{5}{6}$ Thlr.: wie viel zusammen?

19) Eine Hausmutter soll dem Schneider zu einem Kleide $\frac{3}{4}$ Ellen, zu einem andern $\frac{2}{3}$, zu einem

dritten $\frac{5}{6}$, zu einem vierten $\frac{3}{8}$ Ellen Leinwand geben: wie viel im Ganzen?

20) Wenn ein Bauer $8\frac{3}{4}$ Acker Feld, $3\frac{1}{2}$ Acker Wiesen und $2\frac{1}{7}$ Acker Holzboden hat: wie viel Boden besitzt er?

21) Wie viel sind: $18\frac{1}{2}$ Thlr., $3\frac{3}{4}$ Thlr., $7\frac{5}{9}$ Thlr., $20\frac{1}{8}$ Thlr., $1\frac{3}{5}$ Thlr.?

22) Wie viel beträgt das Ganze von folgenden Theilen, woraus das Glas verfertigt wird: zu $1\frac{1}{2}$ Pfd. Kiessand, $\frac{3}{4}$ Pfd. Pottasche, $\frac{1}{3}$ Pfd. Kreide, $\frac{1}{5}$ Pfd. Arsenik?

23) Ein Vater hinterläßt folgendes Vermögen: $2000\frac{7}{30}$ Thlr. $1120\frac{2}{5}$ Thlr. $1200\frac{1}{4}$ Thlr. $130\frac{1}{3}$ Thlr.: wie groß war das ganze Vermögen?

24) Eine Frau erhielt vom Weber 3 Stück Leinwand. Das erste hielt $74\frac{1}{2}$, das zweite $65\frac{3}{4}$ und das dritte $61\frac{7}{18}$ Ellen: wie viel hat sie überhaupt erhalten?

25) Wie viel braucht ein Gastwirth Fleisch zu 3 Mahlzeiten, wenn er zur ersten $16\frac{3}{4}$ Pfd., zur zweiten $28\frac{1}{2}$ Pfd. und zur dritten $15\frac{5}{7}$ Pfd. nöthig hat?

26) Wie weit kommt ein Bote in 3 Tagen, wenn er am ersten $5\frac{1}{2}$, am zweiten $4\frac{1}{4}$, am dritten $3\frac{1}{8}$ Meile zurücklegt?

27) Es kauft einer 6 Zuckerhüte: der erste wiegt $15\frac{3}{4}$ Pfd., der zweite $20\frac{3}{8}$ Pfd., der dritte $17\frac{1}{2}$ Pfd., der vierte $18\frac{1}{3}$ Pfd., der fünfte $16\frac{1}{2}$ Pfd. der sechste $12\frac{2}{3}$ Pfd.: wie viel wiegen sie zusammen?

16.
Subtraction der Brüche.

Subtrahire:

1) $\frac{2}{8}$ von $\frac{5}{8}$; 2) $\frac{7}{4}$ von $\frac{9}{11}$; 3) $\frac{5}{13}$ von $\frac{11}{13}$; 4) $\frac{1}{4}$ von $\frac{5}{8}$; 5) $\frac{2}{3}$ von $\frac{5}{6}$; 6) $\frac{3}{4}$ von $\frac{7}{8}$; 7) $\frac{4}{7}$ von 5; 8) $\frac{2}{9}$ von 3; 9) $\frac{5}{17}$ von 1; 10) $2\frac{1}{3}$ von 8; 11) $5\frac{7}{11}$ von 13; 12) $6\frac{1}{4}$ von 31; 13) $2\frac{2}{7}$ von $6\frac{5}{7}$; 14) $1\frac{1}{9}$ von $2\frac{7}{9}$; 15) $3\frac{2}{5}$ von $4\frac{3}{4}$; 16) $12\frac{12}{19}$ von $100\frac{6}{7}$; 17) $15\frac{1}{4}$ von $37\frac{2}{3}$; 18) $6\frac{4}{5}$ von $19\frac{2}{3}$; 19) $1\frac{9}{11}$ von $7\frac{1}{9}$; 20) $12\frac{1}{2}$ von $68\frac{1}{7}$; 21) $\frac{3}{4}$ von $4\frac{7}{8}$; 22) $\frac{1}{2}$ von $1\frac{2}{3}$; 23) $\frac{6}{7}$ von $4\frac{1}{2}$: 24) $\frac{9}{13}$ von $2\frac{2}{11}$; 25) 7 von $9\frac{3}{4}$; 26) $\frac{35}{39}$ von $7\frac{2}{5}$; 27) $\frac{1}{9}$ von $1\frac{1}{18}$; 28) $\frac{3}{13}$ von $10\frac{4}{31}$; 29) 6 von $8\frac{1}{2}$; 30) 12 von $20\frac{7}{8}$.

31) Karoline erhielt an ihrem Geburtstage vom Vater $\frac{3}{4}$ Thlr., und von der Mutter $\frac{2}{5}$ Thlr.: wie viel hatte sie vom Vater mehr erhalten?

32) Von $\frac{3}{4}$ Pfd. Kaffee hat eine Köchin $\frac{5}{8}$ Pfd. verbraucht: wie viel hat sie noch vorräthig?

33) Der längste Sommertag ist $15\frac{3}{15}$ St., und der kürzeste Wintertag $8\frac{7}{30}$ Stunden: um wie viel ist dieser kürzer, als jener?

34) Von einem Reste Leinwand, welcher $\frac{3}{4}$ Ellen ist, verbraucht man $\frac{2}{3}$ Ellen: wie viel bleibt?

35) Von 36 Thlr. wird ausgegeben $14\frac{2}{3}$ Thlr.: wie viel bleibt?

36) Von 8 Ellen Tuch werden $2\frac{5}{6}$ Ellen verkauft: wie viel bleibt?

37) Von 3 Thlr. werden ausgegeben $\frac{7}{8}$ Thlr.: wie viel bleibt übrig?

38) Eine Bauersfrau hat 8 Pfd. Butter; davon verkauft sie $2\frac{1}{2}$ Pfd.: wie viel behält sie übrig?

39) Von einem Schinken, welcher $8\frac{3}{4}$ Pfd. wog, wurden $3\frac{5}{6}$ Pfd. verspeißt: wie viel blieb übrig?

40) Jemand hatte $25\frac{3}{4}$ Pfd. Wolle, woraus er $24\frac{1}{5}$ Pfd. Garn bekam: wie viel ging beim Kratzen und Spinnen verloren?

41) Ein Bauer verkauft von einer Wiese, die $1\frac{3}{5}$ Acker hält, $\frac{3}{4}$ Acker: wie viel behält er?

17.

Multiplication der Brüche.

Multiplicire:

1) $\frac{1}{2}$ mit 5; 2) $\frac{3}{8}$ mit 4; 3) $\frac{5}{6}$ mit 6; 4) $\frac{3}{5}$ mit 25; 5) 4 mit $\frac{7}{8}$; 6) 7 mit $\frac{3}{11}$; 7) 12 mit $\frac{4}{9}$; 8) $2\frac{1}{4}$ mit 3; 9) $6\frac{7}{8}$ mit 11; 10) $13\frac{1}{7}$ mit 2; 11) 7 mit $2\frac{1}{2}$; 12) 19 mit $13\frac{17}{19}$; 13) $\frac{1}{2}$ mit $\frac{2}{3}$; 14) $\frac{7}{9}$ mit $\frac{5}{7}$; 15) $\frac{6}{13}$ mit $\frac{2}{5}$; 16) $\frac{9}{13}$ mit $\frac{17}{25}$; 17) $\frac{5}{6}$ mit $\frac{3}{8}$; 18) $\frac{27}{35}$ mit $\frac{59}{67}$; 19) $2\frac{2}{3}$ mit $\frac{1}{2}$; 20) $16\frac{7}{8}$ mit $\frac{5}{6}$; 21) $\frac{1}{7}$ mit $\frac{3}{4}$; 22) $\frac{5}{8}$ mit $1\frac{2}{7}$; 23) $\frac{17}{19}$ mit $12\frac{3}{4}$; 24) $3\frac{7}{9}$ mit $2\frac{2}{5}$; 25) $9\frac{11}{18}$ mit $12\frac{5}{11}$; 26) $14\frac{1}{2}$ mit $19\frac{3}{4}$; 27) $172\frac{11}{11}\frac{17}{8}$ mit $94\frac{9}{9}\frac{1}{7}$.

28) Wie viel machen $\frac{3}{8}$ Ctr. mit $\frac{5}{7}$ multiplicirt?

29) Wie viel machen $3\frac{7}{9}$ Thlr. mit $\frac{5}{11}$ multiplicirt?

30) Wie viel giebt $\frac{1}{11}\frac{2}{7} \times \frac{5}{7}$?

31) Wie viel giebt 8 Ctr. $\times \frac{1}{11}\frac{1}{2}$?

32) Ein Bauer ärndete im vorigen Jahre auf einem Acker $3\frac{3}{4}$ Schock; heuer bekam er $\frac{5}{6}$ mal so viel: wie viel also?

33) Ein Dorf muß $625\frac{1}{3}$ Thlr. Steuern bezahlen; ein anderes aber $\frac{3}{7}$ mal so viel: wie viel also?

34) Ein Stückchen Gold ist 14 mal so viel werth, als ein gleich schweres Stück Silber. Wenn demnach ein Stück Silber $76\frac{3}{5}$ Thlr. werth ist;

was wird ein Stück Gold von der nämlichen Schwere gelten?

35) Ein Hausvater hat eine jährliche Einnahme von $235\frac{7}{8}$ Thlr., davon braucht er $\frac{3}{4}$: wie viel also?

18.

Division der Brüche.

Dividire:

1) $\frac{1}{2}$ mit 2; 2) $\frac{3}{4}$ mit 6; 3) $\frac{7}{9}$ mit 12; 4) $\frac{4}{11}$ mit 4; 5) $2\frac{1}{2}$ mit 7; 6) $3\frac{7}{9}$ mit 13; 7) $5\frac{17}{9}$ mit 100; 8) $\frac{1}{2}$ mit $\frac{2}{5}$; 9) $\frac{3}{4}$ mit $\frac{5}{9}$; 10) $\frac{8}{9}$ mit $\frac{5}{8}$; 11) $\frac{8}{10}$ mit $\frac{3}{4}$; 12) $\frac{13}{14}$ mit $\frac{8}{11}$; 13) $\frac{18}{57}$ mit $\frac{67}{83}$; 14) $\frac{4}{7}$ mit $2\frac{1}{2}$; 15) $\frac{8}{13}$ mit $7\frac{3}{4}$; 16) $\frac{5}{11}$ mit $1\frac{2}{3}$; 17) $\frac{12}{19}$ mit $5\frac{7}{11}$; 18) $\frac{3}{5}$ mit $2\frac{1}{5}$; 19) $\frac{7}{8}$ mit $3\frac{3}{7}$; 20) $5\frac{1}{2}$ mit $\frac{3}{4}$; 21) $3\frac{3}{7}$ mit $\frac{7}{8}$; 22) $13\frac{7}{11}$ mit $\frac{3}{10}$; 23) $15\frac{11}{4}$ mit $\frac{7}{8}$; 24) $13\frac{2}{3}$ mit $\frac{5}{9}$; 25) $4\frac{3}{10}$ mit $\frac{9}{11}$; 26) 8 mit $\frac{2}{3}$; 27) 5 mit $\frac{3}{4}$; 28) 7 mit $\frac{5}{6}$; 29) 12 mit $\frac{7}{11}$; 30) 18 mit $\frac{1}{2}$; 31) 14 mit $\frac{4}{7}$; 32) 17 mit $2\frac{1}{2}$; 33) 20 mit $5\frac{3}{4}$; 34) 9 mit $7\frac{7}{8}$; 35) 19 mit $9\frac{1}{7}$; 36) 5 mit $7\frac{3}{4}$; 37) 2 mit $1\frac{5}{7}$.

38) 8 Thaler sollen unter Arme so vertheilt werden, daß jeder derselben $\frac{2}{3}$ Thlr. bekommt. Wie viele Arme können etwas von diesen 8 Thlr. erhalten?

39) Glockengut enthält meistens den vierten Theil Zinn: wie viel Zinn ist demnach bei einer $27\frac{3}{8}$ Ctr. schweren Glocke?

40) Es vertheilte Jemand $\frac{3}{4}$ Ctr. Kaffee unter 5 Personen zu gleichen Theilen: wie viel hat wohl jede auf ihren Theil erhalten?

41) Eine Frau gab einer andern den 4ten Theil von $\frac{8}{9}$ Ctr. Zwetschen: wie viel also?
42) 3 Kaufleute theilten sich in $29\frac{7}{8}$ Ctr. Kaffee: wie viel erhielt jeder?
43) Ein Kaufmann erhält $9\frac{3}{4}$ Ctr. Rosinen in 5 gleich großen Fässern: wie viel war in jedem?
44) Wie viel mal liegen $\frac{2}{7}$ Jahre in $\frac{7}{8}$ Jahren?
45) = = = = $1\frac{6}{13}$ Tag in $2\frac{1}{2}$ Tagen?

19.

Benannte Brüche.

1) Wie viel Groschen sind $\frac{1}{3}$ Thlr.?
2) Wie viel Pfennige sind $\frac{5}{8}$ Gr.
3) Wie viel Pfunde sind $\frac{5}{6}$ Ctr.?
4) Wie viel Lothe sind $\frac{7}{8}$ Pfd.?
5) Wie viel Groschen und Pfennige sind $\frac{6}{7}$ Thlr.?
6) Wie viel Pfunde u. s. w. sind $\frac{16}{19}$ Ctr.?
7) Wie viel Groschen sind $\frac{2}{247}$ Thlr.?
8) Wie viel Pfunde sind $\frac{3}{7488}$ Ctr.?
9) Wie viel Secunden sind $\frac{4}{5}$ Tage?
10) Wie viel Zoll sind $\frac{3}{10}$ Ruthen?
11) Wie viel Quentchen sind $\frac{5}{8}$ Ctr.?
12) Wie viel Pfennige sind $\frac{9}{11}$ Thlr.?
13) Was für ein Bruch vom Thaler sind 12 Gr.?
14) Was für ein Bruch vom Groschen sind 9 Pf.?
15) Was für ein Bruch vom Lothe sind 3 Quch.?
16) Was für ein Bruch vom Ctr. sind 48 Pfd.?
17) Was für ein Bruch vom Jahre sind 104 Tage?
18) Was für ein Bruch von einer Stunde sind 36 Minuten?
19) Was für ein Bruch vom Thaler sind $\frac{2}{3}$ Gr.?

20) Was für ein Bruch vom Ctr. sind $\frac{1}{5}\frac{1}{2}\frac{3}{7}$ Pfd.?
21) Was für ein Bruch vom Pfunde sind $\frac{1}{3}\frac{7}{2}$ Loth?
22) Was für ein Bruch vom Malter sind $\frac{2}{1\,1}$ Scheffel?
23) Was für ein Bruch vom Ctr. sind 3 Qutch.?
24) Was für ein Bruch vom Thaler sind 7 Pf.?
25) Was für ein Bruch vom Scheffel sind 3 Mtz?
26) Was für ein Bruch vom Thaler sind $\frac{7}{9}$ Pf.?
27) Was für ein Bruch vom Jahre sind $\frac{1}{1}\frac{7}{8}$ Min.?
28) Was für ein Bruch vom Ctr. sind $\frac{9}{1\,0}$ Qutch.?
29) Was für ein Bruch vom Malter sind $\frac{3}{4}$ Mtz.?
30) Verwandle 9 Thlr. 12 Gr. in einen Afterbruch vom Thaler.
31) Verwandle 14 Thlr. 7 Pf. in einen Afterbruch vom Thaler.
32) Verwandle 6 Ctr. 4 Pfd. 12 Loth 1 Qutch. in einen Afterbruch vom Ctr.
33) Verwandle 7 Malter 5 Scheffel 3 Viertel 3 Metzen in einen Afterbruch vom Malter.
34) Verwandle 12 Tage 4 Secunden in einen Afterbruch vom Tage.
35) Verwandle 16 Thlr. 20 Gr. 4 Pf. in einen Afterbruch vom Thaler.
36) Verwandle 19 Ruthen 7 Zoll in einen Afterbruch von Ruthe.
37) Verwandle 8 Malter 2 Metzen in einen Afterbruch vom Malter.
38) Verwandle 14 Ctr. 3 Pfd. — Loth 1 Qutch. in einen Afterbruch vom Ctr.
39) Verwandle 7 Jahre — Woche 3 Tage — St.

— Min. 12 Secunden in einen Afterbruch vom Jahre.

40) Verwandle 234 Thlr. 19 Gr. 7 Pf. in einen Afterbruch vom Thaler.

20.

Vermischte Beispiele aus den Rechnungsarten mit Brüchen.

1) Einer nahm ein: $\frac{4}{5}$ Thlr., $\frac{5}{7}$ Thlr., $\frac{2}{3}$ Thlr., $\frac{1}{11}$ Thlr.; gab aber dagegen aus $\frac{3}{17}$ Thlr., $\frac{4}{7}$ Thlr., $\frac{2}{9}$ Thlr., $\frac{7}{13}$ Thlr. und $\frac{1}{4}$ Thlr.: wie viel hatte er übrig?

2) Ein Bauer hatte auf seinem Boden 125 Scheffel 3 Viertel $2\frac{3}{4}$ Mtz. Korn, und verkaufte davon 97 Sch. 1 V. $3\frac{7}{8}$ Mtz.: wie viel behielt er noch?

3) 3 Personen betreiben gemeinschaftlich einen Handel. Sie nehmen ein: 100 Thlr., $63\frac{1}{2}$ Thlr., $5\frac{3}{7}$ Thlr., 81 Thlr., $36\frac{2}{3}$ Thlr.; und geben aus: $\frac{3}{5}$ Thlr., 6 Thlr., $38\frac{1}{2}$ Thlr., $10\frac{7}{8}$ Thlr., 3 Thlr., $\frac{2}{3}$ Thlr.; sie theilen sich hierauf in den Rest: wie viel trägts Jedem?

4) Wie viel giebt: 16 Ctr. 9 Pfd. $17\frac{3}{3}\frac{1}{5}$ Loth multiplicirt mit 9?

5) In 19 Malter 6 Scheffel 3 Viertel $1\frac{7}{8}$ Metze theilen sich 15 Pers.: wie viel erhält jede?

6) Addire: 16 Thlr. 3 Gr. $2\frac{1}{2}$ Pf., 5 Thlr. 19 Gr. $7\frac{8}{9}$ Pf., 110 Thlr. 14 Gr. 3 Pf., 97 Thlr. 21 Gr. $5\frac{3}{4}$ Pf., 12 Thlr. — Gr. $9\frac{1}{1}\frac{1}{2}$ Pf.

7) Subtrahire 3 Ctr. $15\frac{3}{7}$ Pfd. von 7 Ctr. $12\frac{1}{2}$ Pfd.

8) Ein Bäcker kaufte 30 Scheffel 3 Viertel $2\frac{1}{8}$

Metze Korn von diesem verbraucht er sogleich 18 Scheffel 1 Viertel $3\frac{7}{9}$ Metze: wie viel behält er Vorrath?

9) Ein Kaufmann erhielt 4 Fässer mit Kaffee. Das erste wog 6 Ctr. $35\frac{1}{2}$ Pfd; das zweite 4 Ctr. $61\frac{3}{4}$ Pfd., das dritte 3 Ctr. $80\frac{7}{8}$ Pfd. und das vierte 2 Ctr. $8\frac{5}{8}$ Pfd.: wie viel hat er überhaupt erhalten?

10) Wie viel sind zusammen: 8 Ctr. $74\frac{9}{40}$ Pfd., 32 Ctr. $32\frac{7}{32}$ Pfd., 20 Ctr. $20\frac{3}{4}$ Pfd., und 40 Ctr. $37\frac{1}{4}$ Pfd?

11) Ein Tuchmacher bekam 4 Säcke Wolle. Der erste wog 1 Ctr. $15\frac{3}{4}$ Pfd., der zweite 2 Ctr. $27\frac{6}{7}$ Pfd., der dritte $84\frac{5}{6}$ Pfd., und der vierte $70\frac{4}{7}$ Pfd., der erste Sack wog ohne Wolle $16\frac{3}{4}$ Pfd., der zweite $28\frac{5}{8}$ Pfd., der dritte $12\frac{1}{6}$ Pfd., und der vierte $9\frac{1}{3}$ Pfd.: wie viel Wolle hat er also netto erhalten?

12) Auf dem Schlußthurme zu Dresden wiegt die Fahne $1\frac{49}{220}$ Ctr., der Knopf $\frac{109}{110}$ Ctr., und die Spindel, worauf beide befestigt sind, $6\frac{1}{2}$ Ctr.: wie viel wiegt die ganze Last dieses Aufsatzes?

13) Ein gesundes Menschenhaar hat so viel Festigkeit, daß es 8 Loth $2\frac{1}{2}$ Dutch. tragen kann. Ein Pferdehaar hat aber eine $3\frac{29}{34}$ mal größere Festigkeit: wie viel wird letzteres tragen können, ohne zu zerreißen?

14) Die Leber eines erwachsenen gesunden Menschen wiegt $2\frac{13}{16}$ Pfd. Wenn nun ein solcher 140 Pfd. wiegt: den wie vielten Theil seines ganzen Gewichts nimmt seine Leber ein?

15) Ein Berliner Scheffel Rocken giebt nach sehr genauen Versuchen 21 Pfd. $2\frac{1}{3}$ Loth feines, und 44 Pfd. $29\frac{1}{3}$ Loth grobes Mehl. Da man nun gefunden hat, daß aus jenem 24 Pfd. $15\frac{1}{2}$ Loth feines, und aus diesem 59 Pfd. $\frac{3}{4}$ Loth grobes Brod gebacken werden konnte, so soll man bestimmen, wie viel mehr Brod als Mehl aus 1 Scheffel Korn gekommen ist?

16) Ein Landkrämer gab seinen Handel auf, und vertheilte seinen Vorrath unter seine 5 Söhne so, daß der erste $7\frac{3}{4}$ Ctr., der zweite $\&\frac{5}{8}$ Ctr., der dritte $7\frac{5}{7}$ Ctr., der vierte $13\frac{1}{2}$ Ctr. erhielt. Wenn nun der Vorrath $45\frac{3}{7}$ Ctr. war: wie viel hatte nun der fünfte erhalten?

17) Es theilt jemand sein Vermögen unter seine 3 Kinder, so, daß das erste $543\frac{17}{19}$ Thlr. erhält, das zweite $\frac{5}{6}$ mal so viel, und das dritte $\frac{7}{9}$ mal so viel als das erste: wie viel erhielten also die beiden letztern?

18) Addire: $8\frac{1}{2}$ Thlr., $\frac{3}{4}$ Gr., $7\frac{1}{2}$ Thlr., $10\frac{3}{4}$ Pf., $\frac{5}{6}$ Gr., 3 Thlr., $5\frac{7}{9}$ Gr.

19) Ein Berliner Maaß reines Wasser wiegt 2 Pfd. 14 Loth 2 Quentchen. Nun ist Baumöl $\frac{183}{200}$, Leinöl $\frac{116}{125}$, Rüböl $\frac{9}{10}$, Mohnöl $\frac{23}{25}$ mal so schwer als Wasser: wie viel wird also ein Berliner Maaß von diesen Oelarten wiegen?

20) Ein schwerer, frei fallender Körper fällt in einer Secunde $15\frac{5}{8}$ Fuß. Er fällt aber auch in beschleunigter Bewegung, so daß er in der zweiten 3, in der dritten 5, in der vierten 7, in der fünften 9 mal so weit, und so in jeder

folgenden Secunde nach der Ordnung der ungeraden Zahlen fällt. Wenn nun ein Körper 7 Secunden lang fiele: wie tief würde er in jeder Secunde fallen?

21.

Einfache Regeldetri.

1) Eine Elle Tuch kostet $3\frac{1}{2}$ Thlr., was kosten 8 Ellen?
2) Eine Arbeit wird durch 9 Arbeiter in 11 Tagen fertig: durch wie viele Arbeiter in 5 Tagen?
3) Ein Brauer kaufte 78 Klafter weiches Holz. Wie viel muß er bezahlen, wenn die Klafter 5 Thlr. 12 Gr. kostet?
4) Zu einer Festungsarbeit muß man 45 Mann 60 Tage lang haben: wie lange werden 40 Mann daran zubringen?
5) Wenn 84 Pfd. Kalbfleisch 4 Thlr. 3 Gr. 7 Pf. kosten, was kostet 1 Pfd.?
6) Ein Bauer verkauft 2 Malter 6 Scheffel 3 Viertel Korn: wie viel wird er Geld dafür einnehmen, wenn er für 1 Scheffel 1 Thlr. 15 Gr. erhält?
7) Ein Gärtner zieht binnen einigen Jahren 1050 junge Stämmchen in seiner Baumschule, und verkauft das Hundert zu 3 Thlr. 8 Gr.: wie viel trägt ihn das Ganze ein?
8) Wie viel Band bekommt man für 1 Thlr., wenn man für 1 Gr. $1\frac{3}{8}$ Ellen erhält?
9) In einem gewissen Dorfe hatte eine Haushaltung jährlich nöthig 1 Malter 5 Scheffel $3\frac{1}{2}$

Viertel: wie viel hatte sie in 10 Jahren nöthig?

10) Wie viel Scheffel Korn bekommt man für 6 Scheffel Gerste: wenn der Scheffel Gerste 21 Gr., und der Scheffel Korn 1 Thlr. 15 Gr. kostet?

11) Die Besatzung einer Festung ist auf 6 Monate mit Proviant versehen, und 2 Pfd. täglich auf jeden Mann gerechnet. Man vermuthet sich aber länger halten zu müssen, und giebt deshalb nur $1\frac{1}{2}$ Pfd. täglich: wie lange wird man auf diese Art reichen?

12) Ein Fuhrmann verspricht um einen gewissen Lohn 18 Ctr. Waare 6 Meilen weit zu fahren: wie weit müßte er um gleichen Lohn $47\frac{1}{2}$ Ctr. fahren?

13) Ein Fürst hält 500 Mann Soldaten, die ihm jährlich 25000 Thlr. kosten. Schafft er 150 M. ab: wie viel erspart er?

14) Ein Handwerksmann kauft sich ein Paar Schweine für $5\frac{3}{4}$ Thlr. Futter und Mastung kosten ihm 12 Thlr. 7 Gr. die Ausgaben beim Schlachten betragen 1 Thlr. 23 Gr. 3 Pf.: wie hoch kommt ihm 1 Pfd. Fleisch, wenn die Schweine 224 Pfd. wiegen?

15) Wenn Einer in 4 Jahren $28\frac{1}{3}$ Tagen $605\frac{3}{5}$ Thlr. zu verzehren hat: wie viel kommt auf 1 Tag?

16) Wenn 2 Scheffel $3\frac{1}{3}$ Viertel 5 Thlr. $9\frac{3}{4}$ Gr. kosten, was kosten 7 Scheffel $2\frac{1}{2}$ Viertel?

17) Einer hat 1 Malter 6 Scheffel $3\frac{1}{4}$ Metze für 20 Thlr. gekauft: wie viel kommt da 1 Malter 1 Viertel $3\frac{1}{4}$ Metze?

18) Ein Taubenhändler verkauft 90 Paar Tauben für 17 Thlr. 8 Gr.: wie theuer kommen dem Käufer 1 Paar?

19) Eine Frau braucht in 2 Tagen 1 Thlr. 12 Gr. 3 Pf. zur Bestreitung ihrer Ausgaben: wie viel muß sie Geld haben, um diese Auslagen 2 Jahr 4 Monate 5 Wochen und 3 Tage lang bestreiten zu können?

20) Wenn ein Kaufmann für 1 Ctr. 36 Pfd. 18 Loth Waare 63 Thlr. 3 Gr. $7\frac{1}{2}$ Pf. eingenommen hat: wie viel mußte er eingenommen haben, wenn er 8 Ctr. 83 Pfd. 9 Loth von derselben Waare und um denselben Preiß abgegeben hat?

21) Wenn $6\frac{1}{4}$ Eimer Wein mit $109\frac{3}{4}$ Thlr. bezahlt werden: wie theuer kommen $3\frac{3}{4}$ Eimer?

22) Ein Landmann dingt 3 Schnitter, um mit seinem Hafer in 5 Tagen fertig zu seyn; er befürchtet aber Regenwetter, und nimmt noch 4 dazu: in wie viel Zeit wird der Hafer eingerndet seyn?

23) Ein Bote geht täglich 3 Meilen. Nach 8 Tagen wird ihm ein anderer nachgeschickt, der täglich 5 Meilen geht. Wann wird dieser jenen einholen?

24) Eine Arbeit wird in 15 Tagen fertig, wenn täglich 7 Stunden gearbeitet wird: in wie viel Tagen wird sie fertig, wenn täglich 9 Stunden gearbeitet wird?

25) Zu einer gewissen Anzahl Montirungen braucht man 24 Ellen $\frac{5}{4}$ breites Tuch: wie viel wird

man nöthig haben, wenn das Tuch 2 Ellen breit geliefert wird?

26) Für 9 Gr. erhält man 20 Pfd. Brod, wenn das Viertel Korn 1 Thlr. kostet: wie viel erhält man für dasselbe Geld, wenn das Viertel 1 Thlr. 8 Gr. kostet?

27) Ein Regiment ist 6 Kompagnien, jede zu 124 Mann stark, und braucht monatlich 2076 Thlr. 18 Gr. 6 Pf. Löhnungsgelder, den Stab abgerechnet; es enthält aber noch eine Kompagnie Zuwachs, welche eben so stark ist, als eine von jenen: wie viel wird es nun zu monatlicher Löhnung brauchen?

22.

Zusammengesetzte Regeldetri.

1) Ein Fuhrmann erhält für 16 Ctr. auf 28 Meilen 40 Thaler: wie viel wird er für 25 Ctr. auf 35 Meilen bekommen?

2) Ein Weber macht ein Stück Zeuch 54 Ellen lang und $\frac{7}{4}$ breit aus 9 Pfd. Wolle; er soll 7 Stück, jedes zu 40 Ellen und $\frac{3}{4}$ Ellen breit machen: wie viel Wolle hat er nöthig?

3) In einer Stadt, da das Viertel Korn 10 Gr. kostete, wog 1 Groschenbrod 1 Pfd. 3 Viertel: wie viel müßte hiernach ein Brod für 4 Gr. wiegen, wenn das Viertel Korn nur $8\frac{1}{2}$ Gr. kostet?

4) Zu einem Tischzeuge, das $42\frac{1}{2}$ Ellen lang und $\frac{6}{4}$ breit ist, wurden $24\frac{3}{4}$ Pfd. Garn erfordert: wie lang kann ein anderes Stück werden, des-

sen Breite $1\frac{7}{8}$ Ellen beträgt, und wozu $70\frac{1}{2}$ Pfd. Garn gegeben werden sollen?

5) 24 Tagelöhner verdienen sich in 30 Tagen $192\frac{1}{2}$ Thlr. Wie viel muß ein Tagelöhner bekommen, der nur 1 Tag gearbeitet hat?

6) Wenn 2 Gesellen in einer Woche 2 Thlr. 3 Gr. Lohn erhalten: wie viel Lohn werden 6 Gesellen in 6 Wochen 5 Tagen erhalten?

7) In 2 Tagen pflügen 2 Arbeiter 5 Acker, wenn sie täglich 8 Stunden arbeiten: wie viel Arbeiter gehören dazu, wenn sie in 7 Tagen 24 Acker pflügen, und täglich 10 Stunden arbeiten sollen?

8) Von 15 Arbeitern sind in 5 Wochen 200 Klaftern Holz geschlagen worden, indem sie wöchentlich 4 Tage, und täglich 8 Stunden gearbeitet haben. Nun will man zur Schlagung eines andern Holzes 32 Arbeiter annehmen, die wöchentlich 6 Tage, und täglich 2 Stunden mehr, als die ersten arbeiten sollen: wie viel Klaftern werden sie in dieser Zeit fällen?

9) Wenn der Lebensunterhalt für 2500 Menschen in 1 Jahre und 6 Wochen 36000 Thlr. macht: wie viel wird der Lebensunterhalt für 4800 Mann in 3 Jahren machen?

10) Eine Festung ist auf 15 Monate mit Lebensmitteln für 300 Mann versehen, wenn jedem Manne täglich 3 Pfd. gereicht werden. Nach 7 Monaten erhält sie noch 400 Mann Verstärkung; und den Befehl, mit den noch übrigen Lebensmitteln 10 Tage auszureichen. Wie viel

darf jetzt jedem Manne täglich verabreicht werden?

11) Ein Pachter bestellt zur Umgrabung seiner Gärten 8 Tagelöhner. Diese versprechen die Arbeit in 14 Tagen zu beendigen; allein der Pachter wünscht seine Gärten in 9 Tagen umgegraben zu sehn. Wie viel wird er Tagelöhner brauchen?

12) Wenn 6 Mann in 8 Wochen, indem sie wöchentlich 6 Tage, und täglich 8 Stunden arbeiten, einen Graben auswerfen können, der 1152 Fuß lang, 8 Fuß breit und 6 Fuß tief ist: wie viele Mann werden in 3 Wochen, wenn sie wöchentlich nur 4 Tage und täglich 6 Stunden arbeiten, einen andern Graben auswerfen können, der 1920 Fuß lang, 10 Fuß breit und 5 Fuß tief ist?

23.

Reductionsrechnung.

1) Da 3 Karolin 19 Thlr. betragen: wie viel Karolin werden 354 Thlr. ausmachen?

2) Der Laubthaler verhält sich zum Speciesthaler, wie 17 : 18. Wie viel werden demnach 436 Speciesthaler Laubthaler betragen?

3) Der Weimarische Scheffel verhält sich zum Dresdner ungefähr wie 83 : 100. Wie viel Dresdner Scheffel werden demnach 744 Weimarische Scheffel betragen?

4) Der Erfurter Scheffel dagegen verhält sich zum

Dresdner wie 56 : 100; wie viel Erfurter Scheffel sind hiernach 1470 Dresdner?

5) $4\frac{1}{2}$ englische Landmeilen sind ungefähr 1 deutsche Meile: wie viel deutsche Meilen sind also 56 englische Landmeilen?

6) Die Russische Werst verhält sich zur deutschen Meile, wie 1 : 7. Wie viel deutsche Meilen betragen demnach 104 Russische Werst?

7) 14 Thlr. Preußisch Kour. machen 24 Gulden Rheinisch: wie viel Gulden Rheinisch machen 137 Thlr. Preuß. Kour.?

8) Und wie viel Preußisch Kourant machen 674 Gulden Rhein.?

9) Ein Pariser Fuß verhält sich zu 1 Rheinld. Fuß ungefähr wie 1440 : 1391: wie viel Pariser Fuß sind 78450 Rheinld. Fuß?

10) Und wie viel Rheinld. Fuß sind 84567 Pariser Fuß?

24.

Kettenregel.

1) Wie viel betragen 200 Konvent. Thaler in Hannöverischen Thalern Kassenmünze, wenn 5 Konv. Thaler gleich 12 Fl. rh.; 9 Fl. rh. gleich 1 Louisd'or; 1 Louisd'or gleich 7 Fl. Kassenmünze, und 3 Fl. Kassenmünze gleich 2 Hannöv. Thalern sind?

2) Wie viel Stüver Holl. Kourant wird 1 Ducaten aus Breslau in Amsterdam kommen, wenn derselbe in Breslau 96 Silbergroschen gilt und 30 Silbergroschen 1 Thaler betragen, wenn

152 Thlr. 300 Mark Banco in Hamburg gelten, und 2 Mark Banco 35 Stüver Banco in Amsterdam, und 100 Stüver Banco 104 Stüver Kourant betragen?

3) Man soll das Verhältniß der persischen Parasange zur deutschen Meile bestimmen. Man weiß, daß 10 Parasangen 9 brabantische Meilen machen; 1 brabantische Meile 3 italienische; 4 italienische 1 große polnische; 5 große polnische 6 portugiesische; 9 portugiesische 5 westphälische, und 2 westphälische 3 gemeine deutsche.

4) Man verlangt das Verhältniß des Hamburger Schillings zu dem Sächs. Groschen zu wissen, wenn 16 Schill. gleich 1 Mark sind; 57 Mark gleich 4 Louisd'or; 3 Louisd'or gleich 16 Sächs. Thalern; und 1 Sächs. Thaler gleich 24 Gr.

5) Wenn 84 Amsterd. Pfd. 65 Thaler Hamb. Banc. kosten; wie viel Hannöverische Kourantthaler kostet 1 Pfd. Hannöverisch Gewicht, da man weiß, daß 102 Hannöverische Pfd. gleich sind 98 Amsterd. Pfd., und 10 Hamb. Bancothaler so viel betragen als 13 Hannöverische Kourantthaler?

6) In Hamburg kosten 57 Pfd. Hamb. Gewicht 63 Thlr. Kour. Wie viel Sächs. Thaler kostet 1 Leipziger Pfd., wenn 25 Hamb. Pfd. so viel sind, als 26 Leipz. Pfd., und der Wechselcours 12 Proz. zum Vortheil der Hamburger ist, d. h. wenn 100 Thaler Hamburger Kour. in Leipzig 112 Thlr. gelten, und man überdies 16 vom Hundert gewinnen will?

7) Es soll gesucht werden, wie viel 1000 Rubel in Preuß. Thalern ausmachen, wenn 14 Rubel gleich 5 Duc.; 6 Duc. gleich 17 Thlr. Sächs. und 20 Thlr. gleich 21 Thlr. Preuß. sind.

8) Wie viel machen 1000 Dresdner Scheffel in Nürnbergischer Simmra, wenn 59 Dresdner Sch. gleich 120 Berl. Sch.; 22 Berliner Sch. gleich 37 Hannöv. Himten; und 118 Hannöv. Himten gleich 11 Nürnb. Simmra sind?

9) Wie viel kosten 12 Lpz. Ellen von einem Seidenzeuge in Gotha Kourant, wenn 49 Lpz. Ellen gleich 40 Brabanter; 160 Brabant. Ellen gleich 93 Pariser Stab., 1 Paris. Stab. des Seidenzeugs 15 Frank. kostet; 259 Frank. gleich $66\frac{2}{3}$ Thaler Sächs., und 16 Thlr Sächs. gleich 17 Thlr. Goth. Kour. ausmachen?

25.

Gesellschaftsrechnung.

1) Vier Arbeiter erhalten für ihre Arbeit zusammen 248 Thlr., der erste hat aber 20 Tage, der zweite 17 T., der dritte 13 T., und der vierte 9 Tage gearbeitet. Wie viel gebührt also jedem von dieser Einnahme?

2) Vier Bauern bezahlen einem Hirten 70 Thlr. Hüterlohn, jeder nach der Anzahl seiner Schafe. Der erste hat 65, der andere 53, der dritte 172, und der vierte 260 Stück: wie viel muß jeder bezahlen?

3) Als 3 Kaufleute eine Zeit lang mit einander gehandelt hatten, bekam der erste für sein ein-

gelegtes Kapital von 1200 Thlr., 300 Thlr. vom Gewinne; der zweite 410 Thlr. und der dritte 260 Thlr. Es fragt sich, wie viel der zweite und dritte eingelegt hatten, und wie stark das ganze Kapital gewesen?

4) 1 Oberster, 4 Hauptleute, 8 Fähndriche, 200 Husaren und 650 gemeine Soldaten erbeuten 15120 Thlr. Sie vereinigen sich, daß, so oft ein Oberster 40 Thlr. nimmt, so soll ein Hauptmann 30 Thlr., ein Fähndrich 20 Thlr., ein Husar 10 Thlr. und ein gemeiner Soldat 8 Thlr. nehmen: wie viel wird jede Part erhalten?

5) 3 Oekonomen haben eine Heerde Schafe. Dazu dingen sie einen Hirten, und geben ihm 30 Thlr. Lohn. Nun hat der erste 60 Schafe 20 Tage lang, der zweite 70 Stück 40 Tage lang und der dritte nur 20 Stück, aber 40 Tage lang hüten lassen: wie viel muß jeder zum Lohne beitragen?

6) Ein Preiß von 100 Thlr. soll unter 3 Bothen nach Verhältniß ihrer Schnelligkeit vertheilt werden. Der erste macht 30 Meilen in 56 Stunden, der zweite 46 Meilen in 48 St. und der dritte 35 M. in 40 St.: wie viel wird ein jeder vom Preiße erhalten?

7) Vier Personen theilen eine Erbschaft von 60000 Thlr. so, daß, wenn die erste 3 Thlr. nimmt, soll die zweite 5 Thlr., die dritte 8 Thlr. und die vierte 9 Thlr. nehmen: wie viel wird jede erhalten?

8) Es stirbt Jemand und hinterläßt 5 Kinder,

ein Haus und einen Garten. Nach seinem Tode melden sich folgende Kreditoren: A. mit 1500 Fl., B. mit 3000 Fl., C. mit 7500 Fl., und D. mit 4500 Fl. Das Haus, der Garten und die Mobilien werden für 5681 Fl. verkauft, wie viel muß nun jeder der Kreditoren einbüßen, und wie viel wird jeder derselben erhalten?

9) Drei Lohnkutscher gaben ihre sämmtlichen Pferde zu einem Fuhrwesen. Der erste gab 8 Pferde auf 6 Wochen, der zweite 4 Pferde auf 10 Wochen, und der dritte 9 Pferde auf 3 Wochen. Sie erhalten 500 Thlr. zusammen. Wie viel gebührt jedem?

10) Es sollen 12 Dorfschaften 2676 Thlr. Kriegssteuer erlegen; diese Summe aber soll nach den monatlichen Steuern vertheilt werden. Wenn nun das 1ste Dorf $15\frac{1}{4}$ Thlr., das 2te 18 Thlr., das 3te 25 Thlr., das 4te $12\frac{1}{2}$ Thlr., das 5te $24\frac{1}{4}$ Thlr., das 5te $19\frac{1}{3}$ Thlr., das 6te $14\frac{1}{2}$ Thlr., das 7te $20\frac{1}{2}$ Thlr., das 8te $17\frac{2}{3}$ Thlr., das 9te $17\frac{2}{7}$ Thlr., das 10te $16\frac{1}{4}$ Thlr. das 11te $18\frac{1}{2}$ Thlr., das 12te 21 Thlr. terminlich geben: wie viel wird jedes Dorf nach diesem Verhältnisse zu obiger Summe beitragen müssen?

26.

Vermischungs- und Alligations-Rechnung.

1) Wenn zu 1 Pfd. Harzkütte 20 Loth Pech, 10 Loth Kolophonium, und 2 Loth Kreide genom-

men werden: wie viel ist von jedem zu 40 Pfd. nöthig?

2) Feines schwarzes Siegellack besteht aus 3 Pfd. Schellack, 1 Pfd. Kolophonium, 1 Pfd. Terpenthin, 1 Pfd. Kreide, und 1 Pfd. Frankfurter Schwärze. Es sollen 42 Pfd. gemacht werden: wie viel muß man von jedem nehmen?

3) Zu einer Metallcomposition hat man auf 3 Pfd. Kupfer 1 Pfd. 12 Loth Zinn, 24 Loth Zink, und 4 Loth Blei nöthig: wie viel braucht man von jedem Metall, um 12 Ctr. Composition zu bekommen?

4) Grobes Siegellack besteht aus 1 Pfd. Terpenthin, 1 Pfd. Mennige, 3 Pfd. Kolophonium und 4½ Pfd. Kreide. Nun will man 38 Pfd. Siegellack machen: wie viel ist dazu von jedem erforderlich?

5) Jemand hat zweierlei Silber, 10 löthiges und 14 löthiges, und will 2½ Mark (die Mark zu 16 Loth gerechnet) 13 löthiges haben; wie viel muß er von jeder Sorte zur Mischung nehmen?

6) Jemand hat zweierlei Sorten Kaffee; von der bessern kostet das Pfd. 13 Gr, und von der geringern 9 Gr. Er will eine Mischung treffen, daß er das Pfd. für 10½ Gr. geben kann; wie viel muß er von jeder Sorte nehmen?

7) 1 Scheffel Gerste gilt 20 Gr., 1 Scheffel Hafer 14 Gr. Man verlangt eine Mischung, von welcher der Scheffel 16 Gr. kostet: wie viel muß man von jedem nehmen?

8) Jemand verlangt von einem Weinhändler 10 Eimer Wein, den Eimer zu 25 Thlr., dieser

aber hat nur Weine zu 27 Thlr. und 20 Thlr. Wie viel von jeder Sorte braucht er; wenn er diese Weine mischen will, um jene 10 Eimer zu erhalten?

9) Wenn 2 Sorten Thee, die eine den Ctr. zu $70\frac{1}{2}$ Thlr., die andere den Ctr. zu $41\frac{1}{3}$ Thlr. gemischt werden sollen: wie viel muß man von jeder Sorte nehmen, wenn von der Mischung der Ctr. $63\frac{1}{3}$ Thlr. kosten soll?

10) Ein Kaufmann will zweierlei Taback, den einen das Pfd. zu 1 Thlr. 8 Gr., den andern das Pfund zu 14 Gr., so unter einander mischen, daß er das Pfund zu 18 Gr. verkaufen kann: wie viel muß er von jeder Sorte zu der Mischung nehmen?

11) Ein Landmann soll 20 Scheffel Getraide liefern, wo der Scheffel 2 Thlr. 6 Gr. kosten soll. Er besitzt aber nur Getraide den Scheffel zu 2 Thlr. und zu 2 Thlr. 9 Gr. Er will diese beiden deshalb mischen: wie viel wird er von jeder Gattung zur Mischung nehmen dürfen?

27.

Zins- oder Interessenrechnung.

1) Wenn 100 Thlr. in 1 Jahre 5 Thlr. Interessen geben, wie viel geben 650 Thlr.?

2) Wenn aber 100 Thlr. in 1 Jahre $3\frac{1}{4}$ Thlr. Interessen geben: wie viel geben dann 650 Thlr.?

3) Wie viel Zinsen erhält man jährlich von 6480 Thlr. zu $4\frac{1}{2}$ Prozent?

4) Wie viel Zinsen nimmt derjenige ein, der 12460 Thlr. seinem Freunde zu 4 Proz. geliehen hat?

5) Jemand wünscht jährlich 400 Thlr. Zinsen einzunehmen: wie viel Kapital muß er zu 5 Proz. ausleihen?

6) Von 1600 Thlr. Kapital erhält Jemand 88 Thlr. Zinsen: zu wie viel Prozent war es angelegt?

7) Wenn 100 Thlr. $5\frac{1}{2}$ Thlr. Interessen geben: wie viel werden 1050 Thlr. geben?

8) Es nimmt Jemand von seinem ausgeliehenen Kapitale jährlich 163 Thlr. ein: wie groß ist das Kapital, wenn es zu $4\frac{1}{2}$ Prozent ausgeliehen ist?

9) Wenn 100 Thlr. in 1 J. 5 Thlr. Interessen geben: wie viel werden demnach 3740 Thlr. in 5 Jahren an Interessen eintragen?

10) Wenn 100 Thlr. in 1 Jahre zu 5 Prozent 5 Thlr. Interessen geben: wie viel geben 1000 Thlr. zu $4\frac{1}{2}$ Prozent Interessen?

11) Es hat Jemand so viel Kapital außen stehen, daß er in 5 Jahren 560 Thlr. an Interessen davon zieht: wie groß wird das Kapital seyn, wenn der Zinsfuß $5\frac{1}{4}$ Prozent ist?

12) Wie viel Interessen tragen 12000 Thlr. in 8 Monaten, wenn der Zinsfuß $4\frac{3}{4}$ Proz. ist?

13) 100 Thlr. Kapital geben in 1 J. zu 6 Prozent 6 Thlr., wie viel Interessen geben 1050 Thlr. in $3\frac{3}{4}$ Jahren zu $4\frac{1}{2}$ Prozent?

14) Von einem Kapital von 2026 Thlr. hat jemand bei einem Zinsfuße von $5\frac{1}{2}$ Proz. 1728

Thlr. Interessen gezogen: wie viel Jahre hat das Kapital gestanden, wenn 100 Kgp. zu 5 Proz. in 1 Jahre 5 Thlr. Zinsen geben?

15) 7000 Thlr. geben in 3 Jahren 890 Thlr. Interessen. Man will wissen, wie viel Prozent gegeben werden, da 100 Thlr. Kap. in 1 Jahre zu 5 Prozent 5 Thlr. Interessen geben.

16) 540 Thlr. geben in $16\frac{1}{2}$ J. $220\frac{1}{2}$ Thlr. Interessen. Man will wissen, wie groß der Zinsfuß ist, da 100 Thlr. in 1 Jahre zu 6 Prozent 6 Thlr. Interessen geben.

17) Wie viel beträgt der künftige Werth eines Kapitals von 1050 Thlr. nach 7 Jahren, bei einem Zinsfuße von 5 Prozent?

18) Wie viel beträgt der künftige Werth eines Kapitals von 2100 Thlr. 12 Gr. nach 16 Jahren 6 Monaten, bei einem Zinsfuße von $4\frac{1}{2}$ Proz.?

19) Welches ist der baare Werth einer nach $3\frac{3}{4}$ Jahren zahlbaren Summe von 640 Thlr., wenn man 5 Prozent rechnet?

20) Wie viel beträgt der baare Werth einer nach 10 Jahren 5 Monaten 3 Tagen zahlbaren Summe von 1450 Thlr., wenn man den Zinsfuß zu 4 Prozent berechnet?

21) Es bietet Jemand auf ein Gut 70000 Thlr. baar. Ein Anderer aber 80000 Thlr. so, daß 20000 Thlr. baar, 20000 Thlr. nach 2 Jahren, 20000 Thlr. nach 4 Jahren, und 10000 Thlr. nach 5 Jahren gezahlt werden sollen. Man soll beide Gebote mit einander vergleichen.

22) Es bietet Jemand auf ein Haus 500 Thlr.

baar. Ein Anderer aber 550 Thlr. so, daß 300 Thlr. baar, 100 Thlr. nach 2 Jahren, und 150 Thlr. nach 5 Jahren gezahlt werden sollen: welcher von beiden hat mehr geboten?

23) Es hat Jemand an einen Andern folgende Summen zu zahlen: 400 Thlr. nach 6 Monaten; 150 Thlr. nach 1 Jahre; 530 Thlr. nach $1\frac{3}{4}$ Jahren und 600 Thlr. nach 2 Jahren. Man vereinigt sich, diese Posten auf einmal abzutragen. Wann wird dies ohne Schaden beider geschehen können?

24) Es hat Jemand an einen Andern zu zahlen 1000 Thlr. baar, 4000 Thlr. nach 2 Jahren; 6500 Thlr. nach $3\frac{1}{2}$ Jahren, und 10000 Thlr. nach 8 Jahren. Man soll den mittleren Zahlungstermin finden.

28.

Noch einige vermischte Beispiele.

1) Aus 10 Pfd. Elfenbein verfertigt der Kamm-Macher wenigstens 6 Pfd. Kämme. Wenn er nun einen Elephantenzahn von 1 Ctr. 40 Pfd. kauft: wie viel Pfund Kämme kommen daraus?

2) Eine Taube soll in 10 Minuten 30 englische Meilen zurückgelegt haben: wie viel deutsche Meilen hätte die Taube in 1 Stunde 20 Minuten zurücklegen können, da 15 deutsche Meilen $69\frac{3}{5}$ englische Meilen sind?

3) Ein Dresdner Scheffel ist merklich größer, als der Berliner. Er hat nach den neuesten Untersuchungen 5404 Par. Kubikzoll. Da nun 13913 Par. Kubikzoll so viel machen, als 14400 rhldisch.;

so soll man berechnen, wie viel rhldisch. Kubikzoll ein Dresdner Scheffel hat.

4) In einer Scheuer, welche 80 Fuß lang und 54 breit und 30 Fuß hoch ist, können 200 Fuder aufgebauet werden: wie lang muß die Scheuer seyn, welche 44 Fuß breit, 35 hoch und für 160 Fuder geräumig seyn soll?

5) Eine Taschenuhr macht in jeder Secunde $4\frac{4}{5}$ Spindelstreiche. Wird sie wohl so lange dauern, bis sie 1 Billion gemacht hat? Oder wie viel Jahre (zu $365\frac{1}{4}$ Tagen) sind dazu erforderlich?

6) Zu Pechkränzen (womit im Kriege Häuser, Brücken ꝛc. schnell in Brand gesetzt werden) nimmt man zu 4 Pfd. weißem Pech, 2 Pfd. Kolophonium, 2 Pfd. Terpenthin, und 1 Pfd. gestoßenen Schwefel. Wenn nun eine Masse von 276 Pfd. gemacht werden soll: wie viel wird von jedem dieser Theile dazu genommen?

7) Der Telegraph, welcher in Frankreich erfunden ist, befördert eine Nachricht so schnell weiter, daß man dazu auf eine Entfernung von $25\frac{3}{4}$ deutschen Meilen nicht mehr als 13 Min. und 40 Secunden nöthig hat. Wenn also Telegraphen rund um die Erde angelegt werden könnten, welche in eben dem Verhältniß wirksam wären: wie viel Stunden würden für diesen Umkreis von 5400 Meilen erforderlich seyn?

8) Wie viel Wispel Hafer verbraucht man in $\frac{3}{4}$ Jahren für 4 Pferde, wenn 6 Pferde jährlich 3 Wispel bekommen?

9) Vier legten ein Kapital 2000 Thlr., zusammen

um einen Pferdehandel damit zu treiben. Dazu legt der erste 825 Thlr., der zweite 510 Thlr., der dritte 323 Thlr. und der vierte den Rest. Damit haben sie gewonnen 429 Thlr. Davon gehen aber ab: 1) an Fütterungskosten 25 Thlr. 15 Gr. 2) für die Unterhändler 22 Thlr. 3) andere Ausgaben, die nöthig waren, betrugen 11 Thlr. 7 Gr. 3 Pf. Wie viel bekam nun noch jeder nach Abzug dieser Auslagen von dem Gewinne auf seinen Theil?

10) Eine Dachfläche, die 150 Fuß lang und 30 Fuß breit ist, kann mit 17000 Ziegeln gehörig belegt werden: wie viele Ziegel braucht man zu 10 Dächern, wovon ein jedes 80 Fuß lang und 30 Fuß breit ist?

11) Das große Weinfaß auf der Bergfestung Königstein bei Dresden hält 239871 Dresdner Maaß. Wie viel Orhoft Berl. Maaß hat es, da dies 192 Berl. Maaß hält; 1 Berl. Maaß 58, und 1 Dresdner Maaß $47\frac{1}{5}$ par. Kubikzoll enthält?

12) Das Licht pflanzt sich mit einer so ungeheuern Geschwindigkeit fort, daß es den Weg von der Sonne bis zur Erde, oder 20630754 Meilen in der kurzen Zeit von 8 Minuten $7\frac{1}{2}$ Sec. vollendet. Wie viel Tage würde 1) der Schall und 2) eine Kanonenkugel zu diesem Wege gebrauchen, da der Schall in $21\frac{7}{37}$ Sec., und eine Kanonenkugel, wenn sie ihre Geschwindig-

keit, die sie im ersten Augenblicke hat, behalten könnte, in 40 Secunden eine Meile zurücklegt?

13) Das ganz feine rothe Siegellack besteht aus 2 Pfund Terpenthin, 3 Pfund Zinnober, 3 Pfund Schellack und $\frac{1}{2}$ Pfund Kreide. Wie viel sind von diesen Bestandtheilen zu 68 Pfund Siegellack erforderlich?

14) Ein Soldat erhält alle 5 Tage 8 Gr. Löhnung: wie viel beträgt die Löhnung eines Regimentes von 1060 Mann in 4 Jahren?

15) Ein Dresdner Scheffel Korn giebt 125 Pfd. Mehl, woraus $166\frac{2}{3}$ Pfund Brod gebacken werden; ein Scheffel Gerste giebt 110 Pfund Mehl, woraus $146\frac{2}{3}$ Pfund Brod kommen. Wenn nun 1 Scheffel Korn 2 Thlr., 15 Gr., und 1 Scheffel Gerste 1 Thlr. 17 Gr. kostet: wie viel Pfennige kostet 1 Pfund 1) Kornbrod 2) Gerstenbrod?

16) Ein Arbeiter kann täglich 500 Stück thönerne Tabackspfeifen machen, wie viel Groß werden 6 Arbeiter in den 302 Arbeitstagen eines Jahres liefern?

17) Aus Speziesthalern als 13 Loth 6 Gran feinem Silber und preußischen Thalern als 12 löthigem Silber will man 1 Mark $12\frac{1}{2}$ löthiges Silber zusammensetzen: wie viel ist von jeder Sorte zu nehmen?

18) Der nächste Fixstern ist wenigstens 206264

mal weiter von der Erde entfernt, als die Sonne. Da nun eine Kanonenkugel $24\frac{8}{9}$ Jahr, der Schall etwa $13\frac{2}{2}\frac{3}{7}$ Jahr und das Licht $8\frac{1}{5}$ Minuten Zeit gebrauchen, zu der Entfernung der Sonne von der Erde: wie viele Jahre würde 1) die Kanonenkugel; 2) der Schall; 3) das Licht bis zum nächsten Fixsterne Zeit erfordern? (ein Jahr zu $365\frac{1}{4}$ Tagen).

Empfehlungswerthe Bücher der Baumgärtnerschen Buchhandlung in Leipzig.

Dr. F. E. Albrecht, Triumph der reinen Philosophie, oder die wahre Politik der Weiber. In Briefen zweier Freundinnen; nach d. Franz. 8. 16 Gr.

Anecdoten und Charakterzüge, auch Relationen von Schlachten und Gefechten aus den merkwürdigen Kriegen in Süd- und Norddeutschland in den Jahren 1805 — 9. 1r bis 10r Band, oder 1s bis 41s Hef. 8. à 12 Gr. 10 Thlr.

— und Bemerkungen, Musik betreffend. Zur Unterhaltung und Belehrung für die Freunde der Geschichte, und Cultur der Tonkunst und der mit ihr zusammenwirkenden Künste. Größtentheils aus dem Englischen des A. Burgh, A. M., bearbeitet von C. F. Michaelis. kl. 8. 1 Thlr.

Anleitung zur Bildung des mündlichen Vortrags für geistliche und weltliche Redner. 8. 16 Gr.

Ansichten von Palästina, oder dem heiligen Lande; nach Ludwig Mayers Originalzeichnungen, mit Erläuterungen vom Prof. E. F. K. Rosenmüller in Leipzig. 3 Bände mit 36 Kupfern, quer Fol. 12 Thlr.

— in der Türkei, hauptsächlich in Caramanien, einem bisher wenig bekannten Theile von Kleinasien. Nebst einer Auswahl merkwürdiger Ansichten von den Inseln Rhodos und Cypern

*

und den berühmtesten Städten Corinth, Carthago und Tripoli, nach den Originalzeichnungen des Herrn Ludwig Mayer und mit Erläuterungen von dem Dr. Bergk. Mit 20 Kpfrn. quer Fol. 6 Thlr.

(Ein Pendant zu den Ansichten von Palästina.)

Anweisung, gründliche, zum Rechtschreiben der deutschen Sprache. Für den Unterricht der Jugend bearbeitet von M. Johann Peter Graubner, Privatlehrer in Leipzig. 8. 1 Thlr.

Atlas, historischer, von Sachsen, oder augenblickliche Uebersicht der verschiedenen Besitzungen dieses Landes seit dem Jahre 950 bis 1815. Dargestellt auf 25 illum. Karten. 2 Thlr.

— — von Preußen in 12 illum. geogr. Karten mit Erläuterungen über die Vergrößerungen und Verkleinerungen dieses Landes von 1273 — 1816. quer 4. broch. 1 Thlr. 8 Gr.

— — von Rußland, Schweden, Polen, Oesterreich und der Türkei, in 5 illum. Karten mit Erläuterungen über die Vergrößerungen und Verkleinerungen dieser Länder in den Jahren 1155 bis 1816. quer Fol. brosch. 18 Gr.

Bachmann, C. G., die fünf Säulen-Ordnungen nach Vignola, und fünf andern architectonischen Unterstützungen. gr. 4. 1 Thlr. 12 Gr.

Backel, Origines. Eine komische Geschichte. Zwei Theile. Mit einem Titelkupfer. Schreibpapier. 8. 1 Thlr. 8 Gr.

Bäcker, der vollkommene, oder: über das Ganz

der Bäckerei, als ein faßlicher und vollständiger Unterricht zur besten Bereitung der verschiedenen Brotarten und des andern Backwerks. 4to, mit 2 Kupfern. 1 Thlr. 6 Gr.

Bagatellen, romantische, 6 Bändchen, mit einem Titelkupfer. Schreibpp. 8. 4 Thlr. 12 Gr.

Baumgärtner, F. G., Reise durch einen Theil Spaniens, nebst der Geschichte des Grafen v. S., mit illuminirten und braunen Kupfern und Musik. 8. Schreibpp. 1 Thlr. 4 Gr.

Baumgärtner, Gustav Adolph, König der Schweden, als Freund und Liebhaber, in der Manier des Meißnerischen Alcibiades dargestellt. Ein Roman. 8. mit 3 Kupfern. 1 Thlr.

— — neue und nützliche Vorrichtung, um ohne Schaden der Augen bei Licht zu lesen, zu schreiben, und die feinsten Arbeiten vorzunehmen; besonders für Goldarbeiter, Uhrmacher, Zeichner, Kupferstecher u. s. w., nebst einem Aufsatz von J. G. Böttcher, Kupferstecher. Neue Auflage, mit 2 Kupfern. 4. 12 Gr.

Becker, Dr. G. W., in Leipzig, die Hämorrhoiden. Ein guter Rath für alle, die daran leiden, oder sie fürchten. 8. 16 Gr.

— — der Zahnarzt für das weibliche Geschlecht. Nach dem Französischen des Herrn Joseph Le Maire. kl. 8. 12 Gr.

Begriff, kurzer, aller vorzüglich interessanten Wissenschaften und schönen Künste, worin sie nach ihrem Wesen und Werth erklärt und be-

schrieben werden. Nebst einem kurzen Abriß der Geschichte des deutschen Reichs und einer Vorrede vom Vicedirector M. Dolz. kl. 8. 18 Gr.

Bellamy's, Joh., Geschichte aller Religionen mit Angabe der Lehren und der Ausübung des Gottesdienstes unter allen Arten und Bekennern des Christenthums, enthaltend eine Reihe erläuternder Untersuchungen über die Meinungen, Sitten und gottesdienstlichen Gebräuche in den Kirchen von den ältesten bis auf die neuesten Zeiten und über den Ursprung und die Ursache und Ausübung des Götzendienstes und seiner verschiedenen Formen. Nach der zweiten engl. Ausgabe übersetzt. 8. 1 Thlr. 4 Gr.

Bemerkungen, allgemeine, über das Theetrinken, und über das jetzige diätetische Verhalten in vornehmen Gesellschaften; nebst einer Anleitung und deutlichen Vorschrift für Jedermann, besonders aber für gefühlvolle Aeltern, sich und ihre Kinder gesund zu erhalten. Aus dem Engl. 8. Schreibpapier 6 Gr.

Beschreibung von Leipzig, für Fremde und Reisende, die ihren Aufenthalt zweckmäßig und angenehm benutzen wollen. Zweite verbesserte Auflage, vermehrt mit dem Wegweiser durch die Schlachtfelder um Leipzig. Mit 2 Planen und 1 Karte. 12. br. 16 Gr.

Bettlermädchen, das, und ihre Wohlthäter. Aus dem Englischen von M. E. F. J. Voigt, in 5 Bändchen. 1r 1 Thlr. 2r 1 Thlr. 3

1 Thlr. 8 Gr. 4r 1 Thlr. 8 Gr. 5r 1 Thlr. 8. Gr. zusammen 5 Thlr. 16 Gr.

Betrachtung über das Schießen mit der Schrotflinte. Ein belehrendes Handbuch für Jäger und Jagdfreunde. Aus dem Eng. 8. 1 Thlr.

Betrachtungen, kurze, über die Leidensgeschichte Jesu auf alle Tage in der Faste; von einem katholischen Geistlichen. Mit 1 Kupfer. 8. 18 Gr.

—— politische, über die großen Vortheile, welche die von Frankreich ausgegangenen Verwüstungen Europas in der bessern Zukunft gewähren können. Vom Verfasser der Ideen über das politische Gleichgewicht. 8. broch. 12 Gr.

Beweis, unumstößlicher, daß die Erde drei- und mehrmal älter ist, als man gewöhnlich annimmt. Mit einer Beschreibung und genauen Abbildung der von den Franzosen entdeckten zwei uralten Thierkreise in dem großen Isistempel zu Tentyra in Oberägypten. Mit 2 Kpfrn. 8. 12 Gr.

Bibliothek, neu eröffnete, für Kinder von 8 bis 10 Jahren, 2 Bändchen. 12. geburnden. (dieselben Bändchen auch einzeln, siehe Lebensbeschreibung ꝛc.) 1 Thlr. 4 Gr.

Bilderbuch, asiatisches, oder das asiatische Magazin. 9 Hefte, in einem Bande zu herabgesetztem Preis. Mit 52 illum. Kpfrn. 4. 8 Thlr.

Bingley's, W., Biographieen der Thiere, oder Annalen von den Fähigkeiten, der Lebensart den Sitten und der Haushaltung der thierischen

Schöpfung. Nach dem Englischen mit Zusätzen bearbeitet und mit einer Einleitung über die Psychologie der Thiere versehen von Dr. J. A. Bergk. 8. 3 Theile. 4 Thlr. 12 Gr.

Auch unter dem Titel:

Bingley's, W., Thierseelenkunde, oder Sammlung merkwürdiger Anekdoten aus dem Thierreiche, und Schilderung des geistigen Zustandes der Thiere. Nach dem Englischen bearbeitet und mit Bemerkungen aus der Organenlehre des Dr. Gall in Ansehung des Thierreichs versehen v. Dr. Bergk. 8.

Bonaparte's Sündenbekenntniß vor dem Cardinal Maury, nebst einer Unterredung des Generals Berthier, Prinzen von Wagram, mit dem Cardinal Maury. Aus dem Französischen des Generals Sarrazin. 8. broch. 1 Thlr.

Bonapartes Reiseabentheuer von Fontainebleau nach der Insel Elba, nebst Darstellung seines Benehmens in den letzten Tagen seiner Regierung und mehrern Zügen seines Characters. Aus dem Französischen. 18 Gr.

Brogniart, Prof. und Dir., über die Farben, die man aus Metallkalken erhält, und die sich durch Schmelzung auf glasartige Körper befestigen lassen. Uebersetzt und mit Anmerkungen begleitet von G. Frick. (Besonders abgedruckt aus dem 47. Hefte des Magazins aller neuen Erfindungen). 4to. 6 Gr.

Bruchstücke aus dem Leben des Charles, Schulmeisters von Meinau. 12. broch. 12 Gr.

Buch, das goldene, für hohe und niedere Stände oder Grundregeln gut, klug und leicht durch die Welt zu kommen. Zweite verbesserte Auflage, aus dem Englischen nach der eilften Ausgabe, gr. 8. 1 Thlr. 8 Gr.

— — das nöthige, für alle Klassen des Adels, oder Elemente der Heraldik, welche dem Adel, Beamten, Künstler und jeden gebildeten Staatsbürger unumgänglich zu wissen nothwendig sind. Mit 116 Kupferabbildungen. gr. 8. broch. 1 Thlr. 12 Gr.

Buchbinderkunst, die englische, enthaltend, eine Beschreibung von dem Werkzeuge, Vorrichten, Vergolden und Ausarbeiten, Schreibbücherbinden, Schnittfärben, Marmoriren, Sprengen 2c. Mit einem Holzschnitt. Zweite Auflage. kl. 8. 12 Gr.

Busby, Thomas, allgemeine Geschichte der Musik, von den frühesten bis auf die gegenwärtigen Zeiten, nebst Biographien der berühmtesten musikalischen Componisten und Schriftsteller. Aus dem Englischen übersetzt und mit einigen Anmerkungen und Zusätzen begleitet von C. F. Michaelis. In zwei Bänden. Erster Band gr. 8. 2 Thlr. 12 Gr. Zweiter Band 3 Thlr. 12 Gr.

Cäcilie, oder die Rose von Raby. Ein historischer Roman von Agnes Musgrave. Nach der

dritten Ausgabe bearbeitet von Henriette Schubart. 8. 2 Bände 3 Thlr.

Calender, immerwährender, der gesunden Vernunft, oder Handbuch zur Erklärung des Kalenders auf alle Jahre. Allen Biedermännern hohen und niedern Standes, welche vernünftige Begriffe zu befördern suchen, gewidmet. 8. 8 Gr.

Chiromantie, oder Wahrsagerkunst aus den händen, nebst einem Wahrsager aus den Adern; der Ausmessung der Hand, um dadurch zu entdecken, wenn die vornehmsten Fälle im menschlichen Leben sich ereignen; der Länge des Lebens; der Zeit der Verheirathung. Mit Kpfrn. 12 Gr.

Colligni, Admiral von Frankreich. Ein Trauerspiel in fünf Acten von Eduard Marschner, gr. 8. 1 Thlr. 8 Gr.

Cruickshank's, W., Versuche und Erfahrungen über die Wirksamkeit des Sauerstoffs zur Heilung der Lustseuche. Aus dem Englischen mit einer Einleitung von Dr. J. C. F. Leune. 8vo. 8 Gr.

Cumings, Alex., Elemente der großen und kleinen Uhrmacherkunst. Aus dem Engischen mit Anmerkungen von J. G. Geißler. gr. 8. mit 16 Kupfern. 2 Thlr. 12 Gr.

Denkmal der Reformation Luthers beim dritten Jubelfeste am 31. October 1817. aufgestellt und herausg. von F. R. Lenke. Dritte Auflage mit 7 Kpfrn. allegor. Titel und Umschlag, gr. 8. 1 Thlr. 12 Gr.

Denkwürdigkeiten über Napoleons Privatleben, Rückkehr und Regierung im Jahre 1815. Von seinem Privat- und Cabinetssecretair Herrn Fleury von Chabaulon. Aus dem Französischen übersetzt von Dr. Bergk. gr. 8. 1 Thlr. 16 Gr.

Dictionaire für Pferdeliebhaber, Pferdehändler, Bereiter, Cur- und Hufschmidte; oder vollständiges Handwörterbuch der sämmtlichen Roßkunde, von Carl Friedrich Buschendorf, Privatgelehrten in Leipzig; fortgesetzt von v. Arnim. 5 Thle. gr. 8. mit Kpfrn. 1r 1 Thlr. 12 Gr. 2r 1 Thlr. 12 Gr. 3r 2 Thlr. 12 Gr. 4r. 1 Thlr. 12 Gr. 5r 1 Thlr. 12 Gr. zusammen 8 Thlr. 12 Gr.

Echo, das, der Säle von Paris, oder merkwürdige Erzählungen und unbekannte Anekdoten von Napoleon, seiner Regierung, seiner Umgebung, seinem Hofe und seinen Beamten. 15 u. 28 Bändchen, auch unter dem Titel: Bonaparte und seine Familie. 8. broch. à 18 Gr.

— das, aus den Sälen europäischer Höfe und vornehmer Zirkel, oder merkwürdige Erzählungen und unbekannte Anekdoten von den Ereignissen der neuesten Zeit, IIIr Bd. 18 — 5 Heft und 18 — 6s Heft auf 1819 und 18 — 6s Heft auf 1820 à 12 Gr. Führt auch den Titel von der Ameise 28 — 44. Sammlung.

Ehe, die, aus dem Gesichtspunkte der Natur, der Moral und der Kirche, betrachtet von Prof. Dr. Joh. Chr. Gottfr. Jörg und Dr. Heinr. Gottl. Tzschirner. gr. 8. 1 Thlr. 12 Gr.

England und die Engländer. 8. br. 1 Thlr. 8 Gr.

Epigrammen, Charakter-, über ausgezeichnete historische Personen der alten und neuern Zeit. Ein Versuch von D. S. 12mo. 1 Thlr.

Eremit, der, vom Wintermeere. Ein Roman aus dem Englischen bearbeitet von Henriette Schubart. kl. 8. 16 Gr.

Erinnerungs-Almanach, täglicher, historisch-politischer. Eine Taschenbibliothek der wissenswürdigsten Ereignisse aus 27 Jahrhunderten. kl. 8 broch. 1 Thlr. 16 Gr.

Ernesti, Prof. J. C. G., Synonymik, allgemeine lateinische, nach der 2ten Ausgabe von Gardin Dumesnil Synonymes latins, zum bequemern und nützlichern Gebrauch für Deutsche, als Handwörterbuch bearbeitet. gr. 8. 3 Bände. 1r 1 Thlr. 2r 1 Thlr. 3r 1 Thlr. 12 Gr. zusammen 3 Thlr. 12 Gr.

Fenelons, Salignac de la Motte, Lebensbeschreibungen der berühmtesten Philosophen Griechenlands, nach der neuesten Pariser Ausgabe von 1795, übersetzt und bearbeitet von Dr. Gruber. 8. 12 Gr.

Forster, Thomas, über die Wolken und andere Erscheinungen in der Atmosphäre. Nebst mehrern die Ansicht der Wolken u. s. w. erläus

ternden Kupfern. Aus dem Englischen. gr. 8. broch. 1 Thlr. 12 Gr.

Franck, J. P., Abhandlung über eine gesunde Kindererziehung nach medizinischen und physischen Grundsätzen, für sorgsame Aeltern, besonders für Mütter, denen ihre und ihrer Kinder Gesundheit am Herzen liegt. Aus dem Lat. übers. gr. 8. neue Aufl. 12 Gr.

Frankfurther Taschen-Kochbuch, das allerneueste, oder nützliche, aus eigener Erfahrung erprobte Recepte, zu Verfertigung gewöhnlicher und köstlicher Speisen, von einem Frauenzimmer. Erster Theil. Zweite viel vermehrte Ausgabe. kl. 8. 12 Gr.

Freundschaft mit Gott. Ein Versuch zur Erweckung des religiösen Gefühls. Nach dem Englischen des Richard Jones, neu bearbeitet vom Adjunct. E. F. L. Netto, Prediger in Ober-Weimar. Zweite Auflage. 8. 1 Thlr.

Fußarzt, der, oder die Kunst, die Füße zu behandeln und Fußsohlengeschwülste, Frostbeulen Warzen, Nagelkrankheiten und unmäßige Fußschweiße gründlich zu heilen. Nach dem Französischen bearbeitet v. Dr. Heinrich Robbi, nebst einem Anhange von Dr. Joh. Chr. Gottfr. Jörg, Professor an der Universität zu Leipzig. kl. 8. 12 Gr.

Gallerie berühmter Männer aller Nationen und aller Zeiten. Nach dem Französischen. 3 Thle. Mit 216 Portraits. 8. (in Commission.) 12 Thlr.

Gartenbaukunst, neue, oder Sammlung neuer Ideen zur Verzierung der Parks und Gärten. 1 — 5 Lieferung mit 40 Kpf. Folio. à 2 Thlr.

Geheimniß, entdecktes, die Karte zu legen oder zu schlagen, was in französischer Sprache genannt wird: dire la bonne fortune, als ein Beitrag zur gesellschaftlichen Unterhaltung; geliefert von einem Ungenannten, dem diese Wissenschaft bis jetzt unendlich viel Vergnügen im Zirkel seiner Freunde und Bekannten gewährte. Mit ausgemalten Plans. Neue verbess. Aufl. 12. Schreibpp. in 4 Abthl. 2 Thlr. 4 Gr.

Geheimnisse, die enthüllten, des Pharao-Spiels, oder die Künste der Bankiers beim Pharao in Vergleichung mit den Ränken der Pointeur. Erläutert durch hierauf Bezug habende Anekdoten und Erzählungen. kl. 8. 12 Gr.

Genius, der schützende. Eine Geschichte voller Wunder, aber ohne Geister. Von S. 2 Theile, mit einem Kpfr. Schreibpp. 8. 1 Thlr. 12 Gr.

Gesetze, die, des Casinospiels, und die Regeln es zu spielen. Aus dem Engl. übersetzt und vermehrt von A. F. Thölden in London. 2te Auflage. 8. Schreibpapier. 6 Gr.

Gesundheitsfreund, der, oder allgemein faßliche Anweisung, die vorzüglichsten Krankheiten des menschlichen Körpers nach den neuesten Entdeckungen in der Arzneiwissenschaft selbst zu behandeln. Nach der eilften verbesserten Ausgabe des Richard Reece, aus dem Englischen über-

setzt und herausgegeben von Dr. C. G. Kühn. 8. 1 Thlr. 16 Gr.

Glück, häusliches, oder die rechtschaffene Wittwe im Kreise ihrer Kinder. Von der Verfasserin der Lotte Wahlstein. Mit einem Titelkupfer. Schreibpapier. 8. 16 Gr.

Grohmann, J. G., neues historisch-biographisches Handwörterbuch, oder kurzgefaßte Geschichte aller Personen, welche sich durch Talente, Tugenden, Erfindungen, Irrthümer, Verbrechen oder irgend eine merkwürdige Handlung von Erschaffung der Welt an bis auf gegenwärtige Zeiten auszeichneten. Nebst unpartheyischer Anführung dessen, was die scharfsinnigsten Schriftsteller über ihren Charakter, ihre Sitten und Werke geurtheilt haben. 8. 10 Theile. 1r — 6r à 1 Thlr. 12 Gr. 7r 2 Thlr. 8r, 9r, 10r à 1 Thlr. 12 Gr. zusammen 15 Thlr. 12 Gr. (Vom 8. Supplement-Theile an wird dieses Werk durch Hrn. Prediger W. D. Fuhrmann fortgesetzt.)

Guide to Health, oder Anleitung, seine Gesundheit zu erhalten, sein Leben zu verlängern, und in Krankheiten sein eigner Arzt zu seyn; von Townsend. Aus dem Englischen übersetzt von einem practischen Arzt. 8. 1 Thlr.

Günthers, Dr. Ernst, des Quintus Horatius Flaccus, vier Bücher der Oden in gereimten Versen. 8. 1 Thlr.

Gutmanns, Vater, Spaziergänge mit seinen Kindern oder Unterhaltungen über Natur, Neu-

leben und Vorsehung mit der erwachsenen Jugend. Vom Verfasser des mythologischen und naturhistorischen Kinderfreundes. In zwei Theilen. 2 Thlr.

Hausrath, nützlicher, eine Auswahl erprobter Mittel für bürgerliche und ländliche Haushaltungen; aus dem Magazin aller neuen Erfindungen, 66 Hefte, besonders abgedruckt. 2 Theile. 8. broch. à 16 Gr.

Heinrich und Klärchen, eine wahre Geschichte aus den letzten zehn Kriegsjahren. Aus dem 18. Hefte der Ameise besonders abgedruckt. 12. broch. 12 Gr.

Heldenbuch. Ein Denkmal der Großthaten in den Befreiungskriegen von 1808 bis 1815. Deutschen Vaterlandsfreunden und besonders der Jugend gewidmet von Chr. Niemeyer, Verfasser des deutschen Plutarchs. Fünfte Auflage. Mit 46 Portraits und einer illum. Gruppe, in allegor. Umschlag. broch. 1 Thlr. 16 Gr.

Heydenreich's Prof., Gedichte. Mit Kpfrn. 2 Theile. 8. 2 Thlr.

— — Ideen über die interessantesten Gegenstände der Philosophie, nebst einem kritischen Anzeiger der wichtigsten philosophischen Schriften. 3 Bände. 1r 1 Thlr. 2r, 3r à 18 Gr.

Holzweißig's, J. G., Anweisung zur Treppen-Baukunst; für Anfänger und Liebhaber der Baukunst, besonders für Zimmerleute. Mit 16 Kupfern. Folio. 2 Thlr. 12 Gr.

Für Schuldirektoren, Schullehrer und solche, die sich selbst in Wissenschaften unterrichten wollen.

Katechismus der Architektur mit Kupfern. 12 Gr.
Katechismus des Handels. 12 Gr.
Katechismus der Musik. 12 Gr.
Katechismus der Botanik mit Kpfrn. 1ste Abtheilung. schwarz 1 Thlr. 12 Gr. bunt 2 Thlr.
Desgleichen 2r Theil. mit Kpfrn. 1 Thlr. 12 Gr.
Katechismus der Erdbeschreibung. 12 Gr.
Katechismus der Naturgeschichte mit Kpfrn. 12 Gr.
Katechismus der Geometrie. 12 Gr.
Katechismus der Chemie. 12 Gr.
Katechismus der römischen Geschichte. 12 Gr.
Katechismus der Geschichte des alten Griechenlands. 12 Gr.
Katechismus der neuern Geschichte. 12 Gr.
Katechismus der Perspective mit Kupfern. 8 Gr.
Katechismus der Zeichnung und Malerei. 12 Gr.
Katechismus für Mütter. 6 Gr.
Katechismus der Höflichkeit und feinen Lebensart. 8 Gr.
Katechismus der Mythologie. 12 Gr.
Katechismus der griechischen Alterthümer. 12 Gr.
Katechismus der jüdischen Alterthümer. 12 Gr.
Katechismus der römischen Alterthümer. 12 Gr.
Katechismus der Sternkunde. 12 Gr.
Katechismus der Mechanik mit Kupfern. 16 Gr.
Katechismus der sächsischen Geschichte. 18 Gr.
Katechismus der preußischen Geschichte. 16 Gr.
Kleiner Katechismus, Dr. Martin Luthers, von M. G. H. Rosenmüller. 6 Gr.
Katechismus der Physiologie. 16 Gr.
Katechismus der Logik. 16 Gr.
Katechismus der Physik. 16 Gr.
Katechismus über die Pflichten der Kinder. 8 Gr.
Katechismus, erster für Kinder. 8 Gr.
Katechismus der Gesundheit. 8 Gr.
Katechismus über den Gebrauch des Erdglobus. 8 Gr.
Katechismus der Licht- und Sehlehre. 8 Gr.
Katechismus der Aesthetik und Geschmackslehre. 12 Gr.
Katechismus der Electrizität. 16 Gr.
Katechismus der Mineralogie. 18 Gr.

Katechismus der Algebra. 18 Gr.
Katechismus der Chirurgie. 1 Thlr.
Katechismus der Rechenkunst.

Baumgärtnersche Buchhandlung.

Ferner ist daselbst erschienen:

M. G. H. Rosenmüller,

Mitgabe für das ganze Leben

beim Austritt aus der Schule und Eintritt in das bürgerliche Leben am Tage der Confirmation der Jugend geheiligt. Dritte vermehrte und verbesserte Auflage. broch. kl. 8. Mit allegor. Titelkupfer. 16 Gr.

Im Industrie-Comptoir ist erschienen:

Die Wunder des Mikroscops,

oder Darstellung der Weisheit des Schöpfers in verhältnißmäßig kleinen Gegenständen für Freunde des Wissens. Mit 9 Kpfrn. gr. 8. 1 Thlr. —

Dieses Buch schließt für die Jugend eine neue Welt auf, reitzt mächtig die Wißbegierde und erhebt den Geist zur Bewunderung der Natur und ihres Schöpfers: wer sollte sich nun nichtang legen seyn lassen, eine so lehrreiche und nützliche Schrift in die Hände der Jugend, ihrer Lehrer und Erzieher zu bringen, damit sie das Vergnügen genießen, welches neue Aufklärungen über den Menschen und die Natur gewähren?

Die Wunder des Himmels

und das System des Weltalls in einem faßlichen Vortrage zur Beförderung und Erleichterung der astronomischen Kenntnisse für Jedermann. Mit 12 Tafeln. Aus dem Englischen. gr. 8. Preis. 1 Thlr.

Die erhabenen Gegenstände der Sternkunde machen den Inhalt dieses Werkes aus, welches sich dadurch auszeichnet daß es in einem faßlichen und mit dichterischen Stellen belebten Style zu den Betrachtungen der Himmelskörper hinführt, und diese genau so, wie sie in den besten Teleskopen erscheinen, darstellt, auch alles beibringt, was über die Planeten, Kometen und Sonnensysteme von den ersten Astronomen, namentlich von Herschel, Merkwürdiges entdeckt, gelehrt und gemuthmaßt worden ist. Besondere Abschnitte handeln von den Sternbildern und von den verschiedenen Teleskopen. Die erklärten Abbildungen geben Allem die höchste Anschaulichkeit.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Gräfe, Heinrich,

Katechismus der Rechenkunst oder leicht faßlicher und gründlicher Unterricht in den 4 Rechnungsarten in ganzen und gebrochenen Zahlen, und in der Proportionsrechnung, oder der sogenannten Regula de tri, Reductionsrechnung, Gesellschaftsrechnung, Zinsrechnung u.s.w. ; nebst einer Sammlung von Aufgaben über alle vorkommende Rechnungsarten ; für

Leipzig 1824

Bamberg, Staatsbibliothek -- Ma.o.97
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11739844-9